Fontys Hogeschool Venlo
TENTAMENBUNDEL

Dynamica 2

Diverse docenten FTHV WTB/IPO

Werktuigbouw/IPO

23 april 2006
9:00-11:00

Inhoudsopgave

File : `Opgaven/oef1.tex`

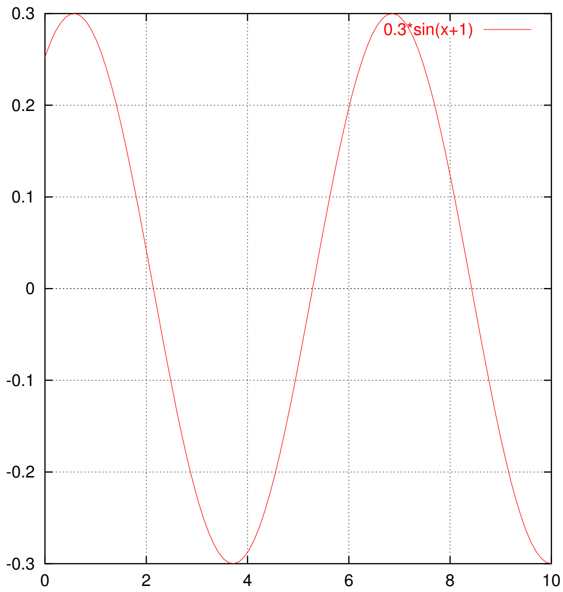
Opgave 1. Geven is de functie

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot +\phi) \tag{1}$$

Teken $x(t)$ als functie van de tijd als gegeven is :

$$\begin{aligned} A &= 300\,[\mathrm{mm}] && (2) \\ \omega &= 1\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}\right] && (3) \\ \phi &= 1\,[\mathrm{mm}] && (4) \end{aligned}$$

Antwoord:



File : `Opgaven/oef2.tex`

Opgave 2. Gegeven is de differentiaal vergelijking

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{5}$$

De algemene oplossing kan geschreven worden als:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \tag{6}$$

Toon aan dat deze vergelijking ook geschreven kan worden als

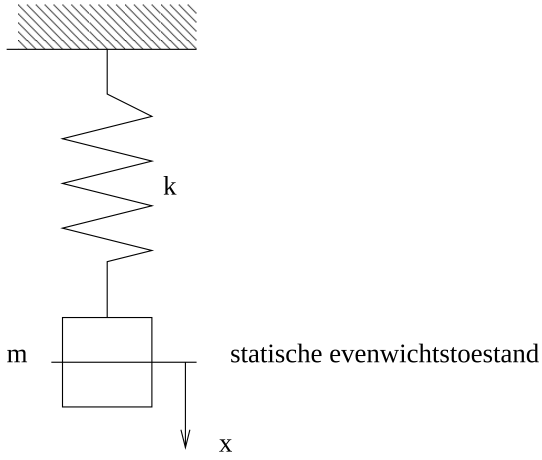
$$y(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t) \tag{7}$$

en als

$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{8}$$

File : `Opgaven/oef3.tex`

Opgave 3.



In de figuur gelden de volgende systeemkenmerken:

$$m = 1\,[\mathrm{kg}] \tag{9}$$

$$k = 16\,\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] \tag{10}$$

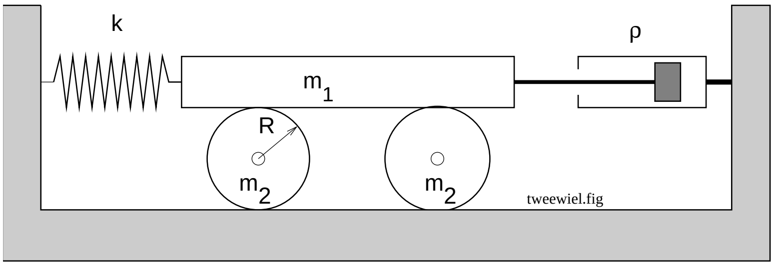
$$x(0) = 0.1\,[\mathrm{m}] \tag{11}$$

$$\dot{x}(0) = 0\,\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \tag{12}$$

Bepaal de eigenhoeksnelheid ω_0 en bepaal de amplitude van de trilling.

File : `1Vrij/o1.tex`

Opgave 1. In onderstaande figuur is een massaveersysteem getekend, bestaande uit een blok en twee rollen. In de gegeven situatie mag U er van uitgaan dat de rollen zuiver rollen, zowel op de vloer als tegen de onderkant van het blok. De veer en de demper zijn aan het blok verbonden.



Verder is gegeven:

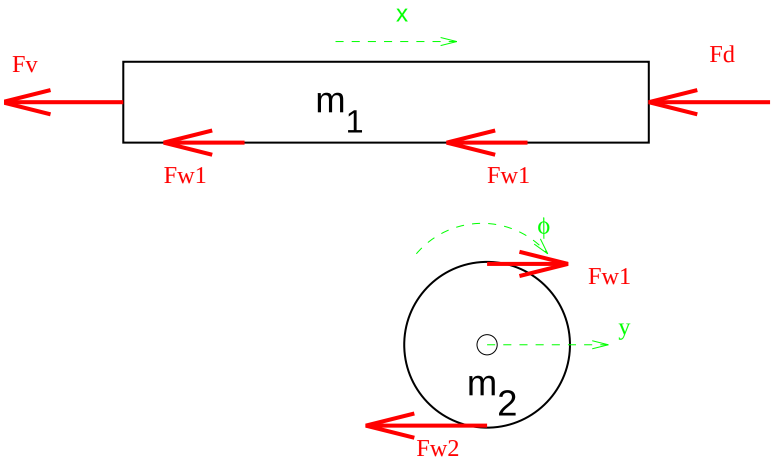
Symbool	Waarde
Massa m_1	$2[kg]$
Massa m_2	$2[kg]$
Veerstijfheid k	$500\left[\frac{N}{m}\right]$
Dempingsconstante ρ	$25\left[\frac{Ns}{m}\right]$

Teken de **vrijlichaamschets**. Neem een x-coördinaat positief naar **rechts** en de hoekverdraaiing ϕ van de wielen rechtsomdraaiend positief.
Bepaal de **eigenhoeksnelheid** en de relatieve dempingsconstante β.
Het systeem wordt 5 cm rechts van de evenwichtspositie losgelaten. Wat is het meest linkse punt dat (gemeten vanuit de evenwichtspositie) bereikt wordt.

Vrij: Vrije trillingen

18 okt 1995

Antwoord:
In onderstaande figuur is de vrijlichaamschets (met alleen de horizontale krachten) getekend van blok en een der rollen.



De verplaatsingscoördinaat van de rollen is y, en ook naar rechts positief. Hieruit volgt voor de koppeling tussen de coördinaten: $y = \frac{1}{2}x$ en $r.\phi = y$. De som der krachten op het blok:

$$\sum_{m_1} F = m_1 \cdot \ddot{x} = -F_d - F_v - 2 \cdot F_{w_1} \tag{13}$$

De wrijvingskracht tussen rollen en blok heet F_{w_1}, en tussen rollen en vloer F_{w_2}. De som van de krachten op de rollen is:

$$\sum_{m_2} F = m_2 \cdot \ddot{y} = F_{w_1} - F_{w_2} \tag{14}$$

Het moment op de rollen zorgt voor de hoekversnelling in ϕ:

$$\sum_{m_2} M = \frac{1}{2} m_2 \cdot r^2 \ddot{\phi} = r \cdot (F_{w_1} + F_{w_2}) \tag{15}$$

Door (15) door de straal te delen , en het resultaat op te tellen bij (14) krijgen we een uitdrukking voor F_{w_1} die in (13) te gebruiken is:

$$\begin{array}{rcl} m_2 \cdot \ddot{y} & = & F_{w_1} - F_{w_2} \\ \frac{1}{2} m_2 \cdot \ddot{y} & = & F_{w_1} + F_{w_2} \\ \hline \frac{3}{2} m_2 \cdot \ddot{y} & = & 2F_{w_1} \end{array}$$

Door substitutie van $y = 1/2x$ geldt dan

$$F_{w_1} = \frac{3}{8} m_2 \cdot \ddot{x} \tag{16}$$

Uiteindelijk leidt dit tot de D.V. :

$$(m_1 + \frac{3}{4} m_2) \cdot \ddot{x} + \rho \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \tag{17}$$

Daarmee wordt de eigenhoeksnelheid:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1 + \frac{3}{4} m_2}} = \sqrt{\frac{500}{2 + 1.5}} = 11.95 \frac{rad}{sec} \tag{18}$$

En β:

$$\beta = \frac{\rho}{2\sqrt{k \cdot m}} = \frac{5}{2.\sqrt{500 \cdot 3.5}} = 0.298 \tag{19}$$

Het systeem beweegt volgens $(0 < \beta < 1)$:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\rho}{2m} t} \cos(\omega_d \cdot t + \phi) \tag{20}$$

Op tijdstip $t = 0$ wordt de massa losgelaten, en is dan op het maximum naar rechts. Op tijdstip $t = \pi/\omega_d$ is de massa maximaal links volgens:

$$x(\frac{\pi}{\omega_d}) = Ae^{-\frac{\rho}{2m} \frac{\pi}{\omega_d}} \cos(\pi + \phi) \tag{21}$$

De verhouding tussen de uitwijking op het tijdstip van de beide extrema wordt daarmee:

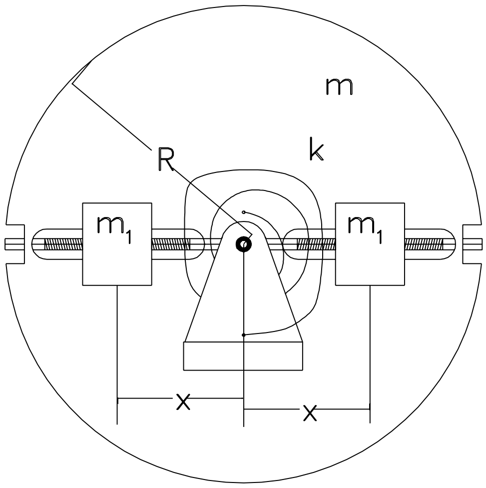
$$\frac{x(t=\frac{\pi}{\omega_d})}{x(t=0)} = -e^{-\frac{\rho\pi}{2\omega_d m}} \tag{22}$$

Daarmee wordt de maximale uitwijking naar links:

$$x(t=\frac{\pi}{\omega_d}) = -x(0)\cdot e^{-\frac{\rho}{2m}\frac{\pi}{\omega_n*\sqrt{1-\beta^2}}} = -x(0)e^{-\frac{\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} = -0.375\cdot x(0) = -0.019[m] \tag{23}$$

File : `1Vrij/o2.tex`

Opgave 2.



In bovenstaande figuur is een mechanische oscilator getekend. Deze is opgebouwd uit een schijf met massa m die roteert om het middelpunt en een spiraalvormige torsieveer met veerstijfheid k. Om de oscilatiefrequentie in te kunnen stellen zijn op de schijf twee massa's in de vorm van schuifblokjes aangebracht. Deze massa's kunnen met een schroefspindel met linkse en rechtse draad symetrisch versteld worden. De schijf heeft een massa m en de massa van de schuifblokjes samen bedraagt $\frac{1}{10}m$. Veronderstel dat de afstand van het zwaartepunt van de schuifblokjes tot het middelpunt van de schijf x bedraagt. Daarbij geldt $\frac{1}{4}R \leq x \leq \frac{3}{4}R$. De oscilator trilt op nominaal frequentie indien $x = 0.6R$.

Gevraagd Bepaal het instelbereik van deze oscilator in procenten van de nominale frequentie. Met andere woorden: wat is de kleinste en grootste frequentie waarmee deze oscilator kan trillen in verhouding tot de nominale frequentie.

Vrij: Vrije trillingen

Antwoord:
Voor dit probleem bestaat de vrijlichaamschets uit een schijf met een variabele massatraagheid, en een (torsie)veer als terugstellende kracht. De differentiaalvergelijking is er een met slechts een tweede orde en een nulde orde term.:

$$J\cdot\ddot{\Theta} + k\cdot\Theta = 0 \tag{24}$$

In deze D.V. is de massatraagheid J variabel volgens

$$J = \frac{1}{2}mR^2 + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot m \cdot x^2 \tag{25}$$

De nominale massatraagheid bedraagt

$$J_{nom} = m \cdot R^2(\frac{1}{2} + \frac{2}{10}(0.6)^2) = 0.572mR^2 \tag{26}$$

De minimale eigenhoeksnelheid wordt bepaald door de maximale massatraagheid met waarde

$$J_{max} = m \cdot R^2(\frac{1}{2} + \frac{2}{10}(\frac{3}{4})^2) = 0.6125mR^2 \tag{27}$$

De maximale eigenhoeksnelheid wordt bepaald door de minimale massatraagheid met waarde

$$J_{min} = m \cdot R^2(\frac{1}{2} + \frac{2}{10}(\frac{1}{4})^2) = 0.5125mR^2 \tag{28}$$

De eigenhoeksnelheid is te bepalen uit de term voor de 0de orde en de term voor de tweede orde volgens:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \tag{29}$$

Hieruit valt te concluderen dat de verhouding van minimale en maximale eigenhoeksnelheid met de nominale hoeksnelheid zich verhouden als de wortel uit de inverse van de verhoudingen van de maximale en minimale massatraagheden. Dus:

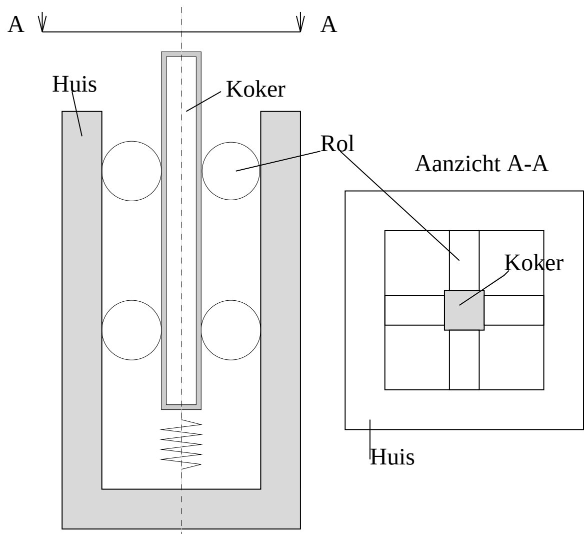
$$\frac{F_{max}}{F_{nom}} = \sqrt{\frac{J_{nom}}{J_{min}}} = \sqrt{\frac{0.572}{0.5125}} = 1.056 \tag{30}$$

$$\frac{F_{min}}{F_{nom}} = \sqrt{\frac{J_{nom}}{J_{max}}} = \sqrt{\frac{0.572}{0.6125}} = 0.966 \tag{31}$$

18 november 1994

File : `1Vrij/o3.tex`

Opgave 3.



In bovenstaande figuur is een mechanisme getekend bestaande uit een huis, een daarin vertikaal bewegende holle koker, geleid door acht rollen. Van de acht rollen zijn er vier getekend in deze doorsnede, de anderen staan loodrecht op het vlak van tekening. De massa van de rollen is 25 gram per stuk, de massa van de holle koker is 50 gram. De rollen zijn onder voorspanning gemonteerd, zodat altijd zuiver rollen verondersteld mag worden. Indien men het toestel horizontaal plaats, zorgt de veer ervoor dat de koker 50 mm uitsteekt, horend bij de ongespannen lengte van de veer. Plaats men het toestel vertikaal, dan zakt de veer 5 mm in.

Gevraagd Wat is de eigenhoeksnelheid ω_0 van dit massa veer systeem.

In de vertikale stand wordt het huis voor de helft met olie gevuld. Daarna wordt de holle koker 10 millimeter naar beneden gedrukt. Bij het uitveren komt de koker maximaal 8 millimeter boven het vertikale evenwichtspunt.

Gevraagd Wat is de dempingskonstante ρ in $\left[\frac{\text{N.s}}{\text{m}}\right]$ die door de olie veroorzaakt wordt.

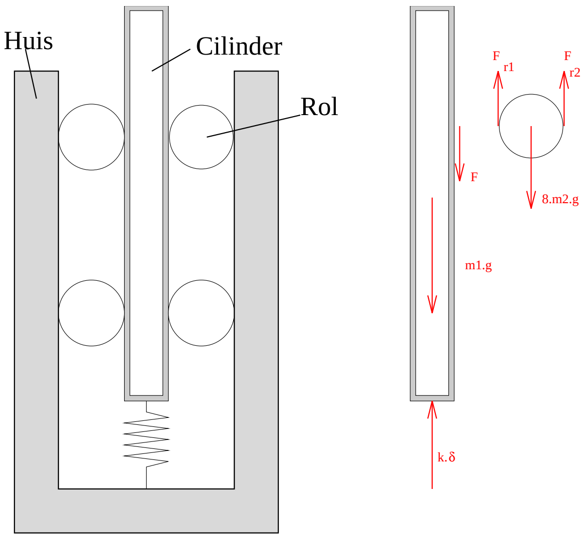
In de uitwerking dienen nette en correkte tekeningen gemaakt te worden, met tenminste een vrijlichaamschets van het systeem bij de eerste vraag.

Vrij: Vrije trillingen

Antwoord:

Antwoord 1

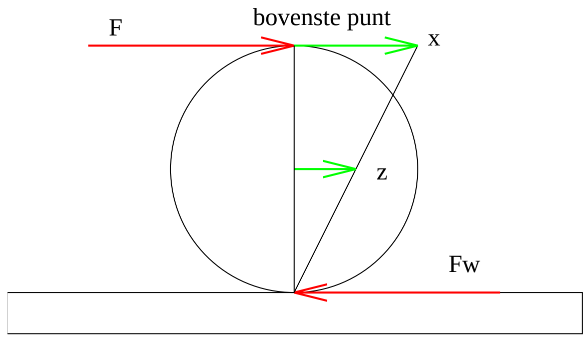
Om de eigenhoeksnelheid ω_0 van het systeem te bepalen is de veerstijfheid en de equivalente massa noodzakelijk. Deze kunnen we bepalen doordat we de zakking door het eigen gewicht kennen.



Uit de vrijlichaamschets kunnen we afleiden dat behalve het eigen gewicht van de koker ook de *de helft* van het gewicht van de rollen op de veer drukt. In (vertikale) rust is de totale veerkracht in evenwicht met de krachten ten gevolge van het eigen gewicht. $F_v = (m_1 + 8 \times \frac{m_2}{2}) \cdot g$. De invering ten gevolge van deze belasting is 5 mm, zodat (met $g = 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$) voor de veerstijfheid geldt

$$k_v = \frac{(m_1 + 8 \times \frac{m_2}{2}) \cdot g}{0.05} = \frac{(0.050 + 8 * \frac{0.025}{2}) \times 10}{0.05} = 30 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right] \qquad (32)$$

De equivalente massa (m^*) heeft wat meer voeten in de aarde: Van een rol die aan een zijde op een stilstaand vlak afrolt, en aan de andere zijde aangedreven wordt met een kracht is de versnelling van het bovenste punt (zie onderstaande figuur) en daarmee de equivalente massa als volgt te bepalen.



De krachten die werken op de rol zorgen voor een horizontale versnelling $\ddot{x}$ op het aangrijppunt van de bovenste kracht. De versnelling van het zwaartepunt van de rol is $\ddot{z}$. Uit de som van de krachten volgt:

$$\sum_H F = m \cdot \ddot{z} = F - F_w \tag{33}$$

De som van de momenten:

$$\sum_Z M = \frac{1}{2} m.R^2.\ddot{\varphi} = F \cdot R + F_w \cdot R \tag{34}$$

Met de relatie $\varphi = \frac{z}{R}$ zijn deze twee vergelijkingen te combineren tot

$$\frac{1}{2} m\ddot{z} \quad = F + F_w \tag{35}$$

$$m\ddot{z} \quad = F - Fw \tag{36}$$

$$\frac{3}{2} m\ddot{z} \quad = 2F \tag{37}$$

De equivalente massa is die massa die we vinden in de wet van Newton voor de versnelling van het aangrijppunt van de kracht. Aangezien $z = \frac{1}{2}x$ geldt voor de equivalente massa van de rol $m^* = \frac{3}{8}m_r$. Voor het gegeven systeem met 8 van dergelijke rollen plus een translerende massa geldt dan

$$m^{**} = 8 * m^* + m_k = 8 * \frac{3}{8} m_r + 0.050 = 0.125 \text{ [kg]} \tag{38}$$

Daarmee wordt de gevraagde eigenhoeksnelheid:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m^{**}}} = \sqrt{\frac{30}{0.125}} = 15.49 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right] \tag{39}$$

Antwoord 2
Er is sprake van een gedempte trilling, waarbij de amplitude binnen een *halve* trilling afneemt van 10 naar 8 millimeter. De trilling heeft de vorm van

$$x(t) = A \cdot e^{\frac{-\rho}{2m} \cdot t} \cos(\omega_d \cdot t + \varphi) \tag{40}$$

Als we de verplaatsing op tijdstip $t = \frac{\pi}{\omega_d}$ delen op de verplaatsing op tijdstip t=0, dan blijft alleen het volgende over:

$$\frac{10}{8} = e^{\frac{\rho}{2m}\frac{\pi}{\omega_d}} \tag{41}$$

of

$$\ln 1.25 = \frac{\rho}{2m}\frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\rho}{2m})^2}} \tag{42}$$

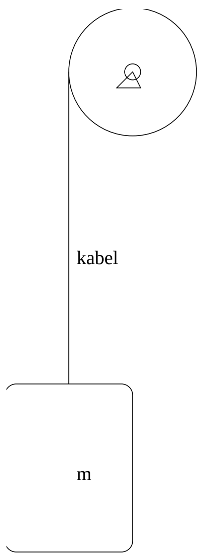
Met enig rekenwerk is ρ hieruit expliciet te maken:

$$\rho = 2m^*\sqrt{\frac{(\ln 1.25)^2 \cdot \omega_0^2}{(\ln 1.25)^2 + \pi^2}} = 0.2744 \left[\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}}\right] \tag{43}$$

18 november 1994

File : `1Vrij/o4.tex`

Opgave 4. In een hijstoestel rolt een kabel af van een hijstrommel. De kabel zit verbonden aan de last volgens onderstaande figuur.



In bedrijf is de zwaarste belasting die voor de kabel kan optreden het plotseling invallen van de noodrem. Er mag vanuit gegaan worden dat deze noodrem de kabeltrommel opeens laat stilstaan. De meest ernstige situatie die kan ontstaan is het afremmen bij de neergaande beweging. Gegeven is: De neerwaartse snelheid bedraagt 3 meter per seconde. De lift is vol belast, en heeft daardoor een massa van 1200 kg. De meegaandheid γ (makkelijk woord voor compliantie) van de kabel bedraagt $\gamma = 0,4 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{Nm}}\right]$. Dit betekent dat de kabel "slapper" wordt naarmate hij verder afgerold is. Het betekent ook dat de stijfheid omgekeerd evenredig is met deze meegaandheid en dus ook de kabellengte, d.w.z. $k = \frac{1}{\gamma \cdot l}$. Demping ten gevolge van wrijving maakt de situatie gunstiger en mag daarom in deze veiligheidsberekening verwaarloosd worden.

a Maak de vrijlichaamschets voor deze situatie. De belasting van de kabel bestaat uit het eigen gewicht van de liftkooi plus de dynamische komponent die ontstaat door de eigentrilling die ontstaat bij het plotseling afremmen.

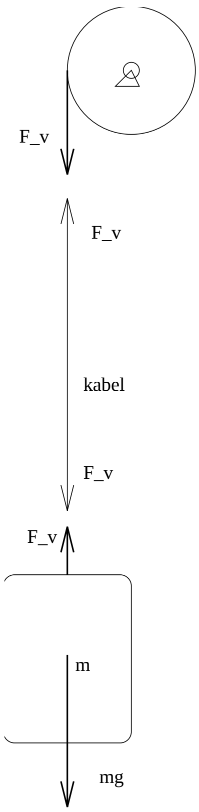
b Bereken de belasting van de kabel bij konstante snelheid èn de maximale belasting ten gevolge van de eigentrilling door plotseling afremmen. Doe dit laatste voor een afgerolde kabellengte van 4 meter (minimale lengte, grootste stijfheid) en 20 meter (maximale lengte, kleinste stijfheid). Bedenk daarbij dat de randvoorwaarden luiden: verplaatsing ten opzichte van nieuwe evenwicht: 0 [m] en (begin)snelheid = 3 $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$.

Vrij: Vrije trillingen

Antwoord:
Dit probleem komt overeen met een vrije trillingsprobleem met beginvoorwaarden:

$$x(0) = 0 \tag{44}$$
$$\dot{x}(0) = 3 \tag{45}$$

De vrijlichaamschets is te triviaal, zie onderstaande figuur:



De bewegingsvergelijking is die van een vrije trilling met een stijfheid afhankelijk van de kabellengte:

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = 0 \tag{46}$$

De kabelstijfheid bedraagt

$$k_4 = \frac{1}{\gamma \cdot l} = \frac{10^6}{0.4 \cdot 4} = 625000 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right] \tag{47}$$

$$k_{20} = \frac{1}{\gamma \cdot l} = \frac{10^6}{0.4 \cdot 20} = 125000 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right] \tag{48}$$

De eigenhoeksnelheden voor deze twee gevallen bedraagt nu:

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{625000}{1200}} = 22.8 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right] \tag{49}$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{125000}{1200}} = 10.2 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right] \tag{50}$$

$$\tag{51}$$

De kabelbelasting bij konstante snelheid is uiteraard massa maal zwaartekrachtversnelling. = 1200*9.81 = 11772 N. De maximala belasting tengevolge van de trilling die door het afremmen onstaat is gelijk aan de maximale versnelling maal de massa.
Uit het gegeven dat de demping verwaarloosd mag worden volgt dat de gevolge bewegingsfunctie is

$$y(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi) \tag{52}$$

Uit de randvoorwaarden volgt dat op tijdstip t=0 de grootste snelheid optreedt. Voor deze snelheid $\hat{V}$ geldt $\hat{V} = \omega_0 \cdot A$. De maximale versnelling is $\hat{a} = \omega^2 \cdot A = \omega \cdot \hat{V}$.
Met andere woorden de maximale kabelbelasting in beide gevallen bedraagt:

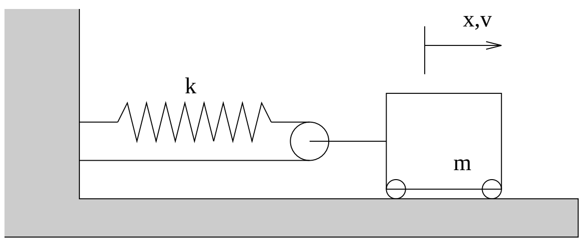
$$F_4 = 1200 \cdot (g + \omega_4 \cdot V(0)) = 93930[\text{N}] \tag{53}$$

$$F_{20} = 1200 \cdot (g + \omega_{20} \cdot V(0)) = 48514[\text{N}] \tag{54}$$

17 okt 1996

File : `1Vrij/o5.tex`

Opgave 5. Het systeem in onderstaande figuur bestaat uit een karretje met massa m = 12 [kg] , wrijvingsloos bewegend over de vloer, met een massaloze katrol verbonden aan een veer met stijfheid k = 100 $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$. De beginsnelheid van het karretje $\dot{x}(0) = 3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, de beginuitwijking ten opzichte van de evenwichtssituatie $x(0) = 0\,[\text{m}]$.



a Maak de vrijlichaamschets voor deze situatie.

b Bereken de maximale kracht die de veer in deze bewegingssituatie uitoefent.

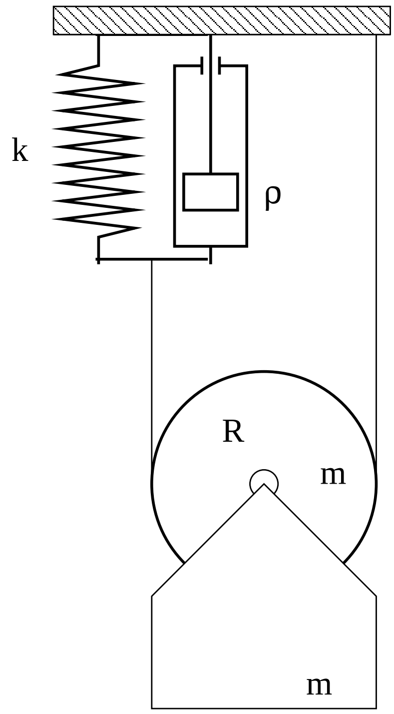
Vrij: Vrije trillingen

Antwoord:

21 nov 1996

File : `1Vrij/o6.tex`

Opgave 6.



`katrol1.fig`

Het systeem in bovenstaande figuur bestaat uit een massa $m_1 = 10$[kg] , opgehangen aan een katrol, ook met een massa m_2=10[kg] . De katrol mag beschouwd worden als een massieve schijf met radius R=0.2 [m] . De veer heeft veerkonstante k=10000$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$, de demper dempingskonstante ρ=200$\left[\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}\right]$. Dit systeem wordt 5[cm] onder de evenwichtstoestand losgelaten.

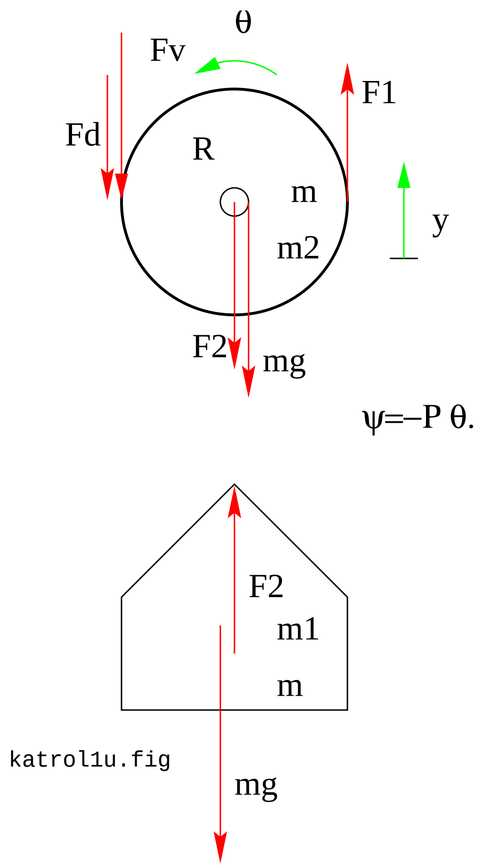
a Bepaal de gedempte eigenhoeksnelheid.

b Wat is de maximale hoogte die dit systeem bereikt.

Vrij: Vrije trillingen

7 oktober 1997

Antwoord:
De vrijlichaamschets is gegeven in onderstaande figuur.



De verticale verplaatsing noemen we y, de verlenging van de veer z. De relatie tussen verplaatsing y en hoekverdraaiing θ luidt $y = -R \cdot \theta$. Uit het verticale krachtenspel, onder weglating van het statische effect van de zwaartekracht, op de onderste massa m_1 volgt:

$$\sum_{m_1} F = m_1 \cdot \ddot{y} = F_2 \tag{55}$$

Uit het verticale krachtenevenwicht op de katrol volgt

$$\sum_{m_2} F = m_2 \cdot \ddot{y} = -F_2 - F_v - F_d + F_1 \Rightarrow 2m \cdot \ddot{y} = -F_v - F_d + F_1 \tag{56}$$

Het moment om het massamiddelpunt van de katrol is:

$$\sum_{J} M = \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\theta} = F_1 \cdot R + F_v \cdot R + F_d \cdot R \tag{57}$$

Met de relaties

$$y = -R \cdot \theta \tag{58}$$
$$\dot{y} = -R \cdot \dot{\theta} \tag{59}$$
$$\ddot{y} = -R \cdot \ddot{\theta} \tag{60}$$

en links en rechts delen door R maken we van vergelijking 57

$$-\frac{1}{2} \cdot m\ddot{y} = F_1 + F_v + F_d \tag{61}$$

en door deze van elkaar af te trekken (56-61) valt de onbekende F_1 uit de vergelijking. 56:

$$\begin{array}{rcll} 2m\ddot{y} &=& F_1 - F_v - F_d & (62) \\ -\frac{1}{2}m\ddot{y} &=& F_1 + F_v + F_d \qquad - & (63) \\ \hline 2\frac{1}{2}m\ddot{y} &=& -2 \cdot F_v - 2 \cdot F_d & (64) \end{array}$$

Voor de demp- en veerkracht geldt: $F_d = \rho \cdot \dot{z} = \rho \cdot 2 \cdot \dot{y}$ en $F_v = k \cdot z = 2 \cdot k \cdot y$ hetgeen de d.v. oplevert:

$$2\frac{1}{2} \cdot m \cdot \ddot{y} + 4 \cdot \rho \cdot \dot{y} + 4 \cdot k \cdot y = 0 \tag{65}$$

De gedempte eigenhoeksnelheid is dan:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k^*}{m^*} - \left(\frac{\rho^*}{2m^*}\right)^2} \tag{66}$$

$$= \sqrt{\frac{4k}{2.5m} - \left(\frac{4\rho}{5m}\right)^2} \tag{67}$$

$$= \sqrt{\frac{40000}{25} - \left(\frac{800}{50}\right)^2} = 36.66 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right] \tag{68}$$

Vraag b
Met behulp van het logaritmisch decrement is de afname van de trilling te bepalen. Daarvoor hebben we de dempingsverhouding β nodig:

$$\beta = \frac{\rho^*}{2\sqrt{k^* m^*}} = \frac{800}{2\sqrt{40000 \cdot 25}} = 0.4 \tag{69}$$

Na een halve trilling is het *logaritmisch* decrement ook half zo groot, met andere woorden na een halve periode is de verhouding tussen de amplitudes:

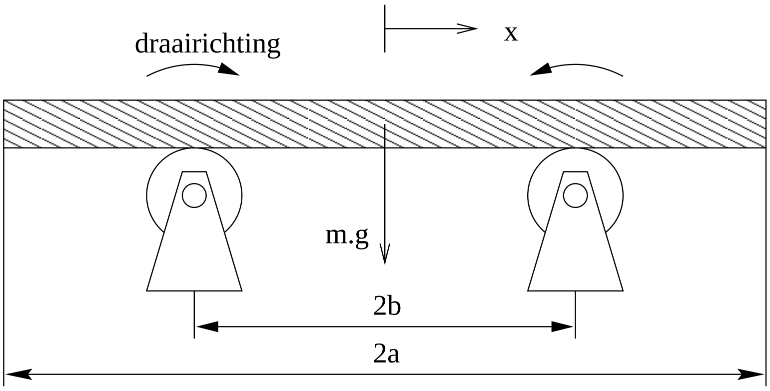
$$\frac{\hat{Y}_0}{\hat{Y}_1} = e^{\frac{\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} = e^{\frac{\pi \cdot 0.4}{\sqrt{1-0.4^2}}} = 3.94 \tag{70}$$

Dan is dus de maximale hoogte boven het evenwichtspunt:

$$\hat{Y}_1 = \hat{Y}_0 \cdot e^{-\frac{\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{5}{3.94}[\text{cm}] \tag{71}$$

De gevraagde hoogte is dan 1.27 [cm] .
File : `1Vrij/o7.tex`

Opgave 7.



`wrijfrollen.fig`

In bovenstaande figuur ligt een balk op twee draaiende rollen. De draairichting van de rollen is zo, dat zij elk de balk naar het midden van de opstelling willen duwen. De snelheid aan de omtrek van de rollen is 10 $\left[\frac{m}{s}\right]$. De volgende gegevens zijn bekend:

beschrijving	waarde	dimensie
halve lengte balk a	1.5	[m]
halve afstand rollen b	1	[m]
wrijving tussen balk en rol μ	0.3	[−]
Zwaartekrachtsversnelling	10	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$

De balk wordt 10 [cm] naar rechts verschoven en daarna losgelaten.

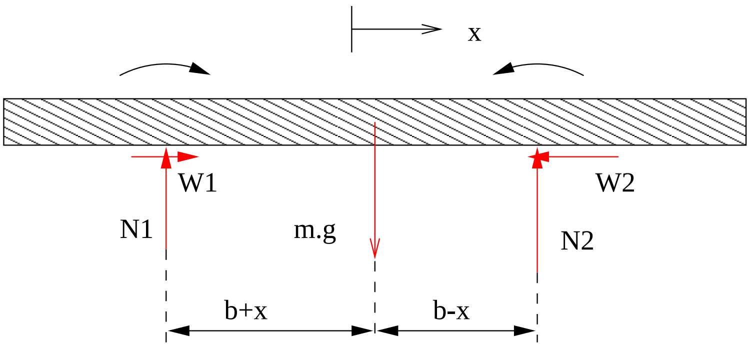
a Als altijd de vrijlichaamschets.

b Geef de bewegingsfunctie die ontstaat na lostlaten.

c Is hier sprake van een gedempte of ongedempte trilling? Verklaar het antwoord.

23 november 1997

Antwoord:
a De vrijlichaamschets.



`wrijfrollenu.fig`

b De normaalkrachten zijn afhankelijk van de positie van de balk. Uit vertikaal evenwicht volgt

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \tag{72}$$

Uit momentenevenwicht rond het massamiddelpunt van de balk volgt

$$N_1 \cdot (b + x) + N_2 \cdot (b - x) = 0 \tag{73}$$

Met andere woorden:

$$N_1 = \frac{mg(b - x)}{2b} \tag{74}$$

en

$$N_2 = \frac{mg(b + x)}{2b} \tag{75}$$

Hieruit volgt dat voor de horizontale beweging er een aandrijvende kracht ontstaat, zijnde verschil van de twee wrijfkrachten.

$$m \cdot \ddot{x} = W_1 - W_2 = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{b}\{(b - x) - (b + x)\} = -\frac{\mu m g}{b} \cdot x \tag{76}$$

Hieruit volgt de differentiaalvergelijking:

$$m\ddot{x} + \frac{\mu m g}{b} \cdot x = 0 \tag{77}$$

In deze dv is geen "dempterm" (factor maal $\dot{x}$) aanwezig, zodat er sprake zal zijn van een ongedempte trilling. De trilling zal de vorm

$$x(t) = \hat{X} cos(\omega_n \cdot t) \tag{78}$$

hebben. Hierin is $\hat{X} = X_0 = 10$[cm] en de hoeksnelheid is

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{\mu m g}{b m}} = \sqrt{\frac{\mu g}{b}} = \sqrt{\frac{0.3 \cdot 10}{1}} = 1.73 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right] \tag{79}$$

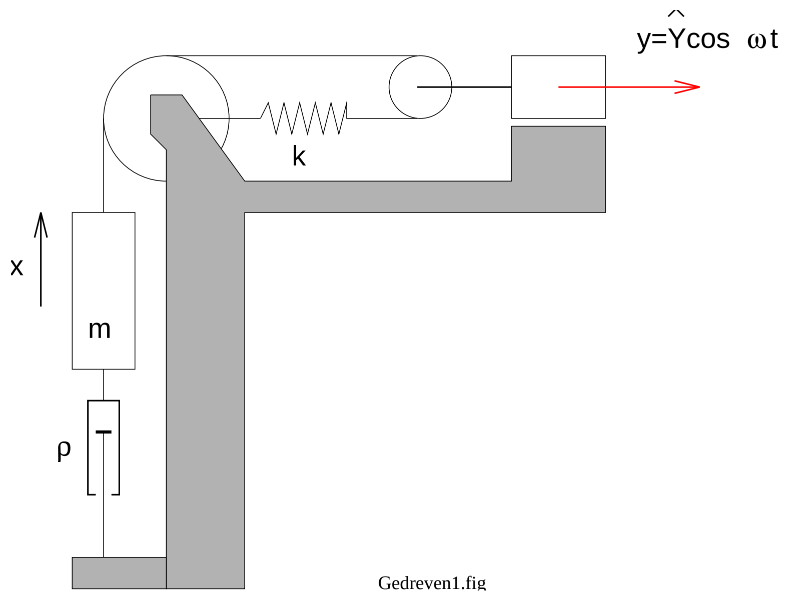
c Er is sprake van een ongedempte trilling, immers de term die de demping zou moeten veroorzaken ($\rho \cdot \dot{x}$) is afwezig. De trilling zal blijven bestaan. Dit ondanks het feit dat de werking van dit "massaveer" systeem op wrijving berust.

File : `2Gedwongen/o1.tex`

Opgave 1. Het in onderstaande tekening gegeven mechanisme wordt aangedreven via een (co)sinusvormige beweging. Bepaal via het maken van een vrijlichaamschets en het opstellen van de bijbehorende differentiaalvergelijking de stationaire trilling x als funktie van tijd. Gegeven:

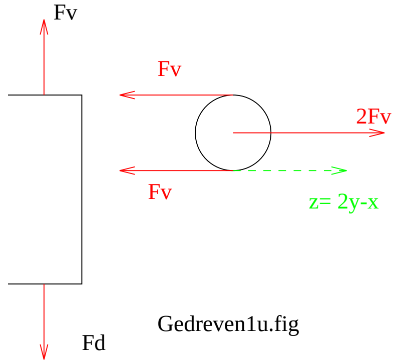
Symbool	Waarde
Massa m	5 [kg]
Veerstijfheid k	2000 $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$
Dempingsconstante ρ	100 $\left[\frac{\text{N.s}}{\text{m}}\right]$
$\hat{Y}$	0.05 [m] .
ω	40 $\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$

De katrollen mogen massaloos verondersteld worden.



Gedwongen trillingen 1: Opstellen van overdrachtsvergelijking

Antwoord:
Vrijlichaamschets:



Uitrekking veer is gelijk aan

$$2 \cdot y - x$$

zodat de veerkracht wordt:

$$F_v = k(2 \cdot y - x)$$

De dempkracht is:

$$F_d = \rho \cdot \dot{x}$$

De veerkracht wordt via het koord naar de massa geleid. Dit leidt tot:

$$\sum_m F = m\ddot{x} = k \cdot (2 \cdot y - x) - \rho\dot{x}$$

en uiteindelijk tot de DV

$$m.\ddot{x} + \rho \cdot \dot{x} + k \cdot x = 2 \cdot k \cdot y$$

Overgang naar het complexe vlak met $x(t) = Re\{\bar{X}e^{i \cdot \omega \cdot t}\}$ levert :

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{2k}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k}$$

Voor de versterking geldt dan

$$|H| = \left|\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\right| = \frac{2k}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\rho\omega)^2}}$$

En voor de fase ϕ:

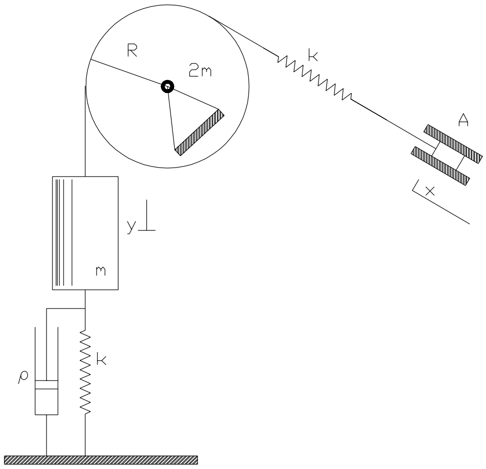
$$\phi = -\arctan\left(\frac{\rho\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

Numeriek: —H—= 0.55 en ϕ= -arctan(2/3)

18 okt 1995

File : `2Gedwongen/o2.tex`

Opgave 2.



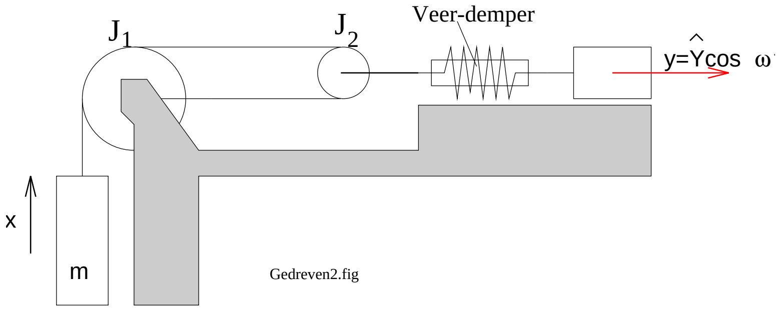
Het in bovenstaande figuur gegeven mechanisme wordt aangestoten met een verplaatsing $X(t) = \hat{x}\cos\omega t$. Gegeven is: de massa van de katrol bedraagt $2m$, het blok heeft een massa van m, de beide veren hebben een stijfheid k, en de dempingsverhouding β tengevolge van de dempingsconstante ρ bedraagt 0.25.
Gevraagd Bereken de amplitude $\hat{y}$ van de verplaatsing van de massa m.
Gevraagd Als de verplaatsing in A plotseling wordt stil gezet, met welke frequentie zal het systeem doortrillen voordat het ten gevolge van de demping geheel tot rust komt.

Vrij: Vrije trillingen

18 november 1994

File : `2Gedwongen/o3.tex`

Opgave 3.



In bovenstaand probleem zijn de volgende gegevens bekend:

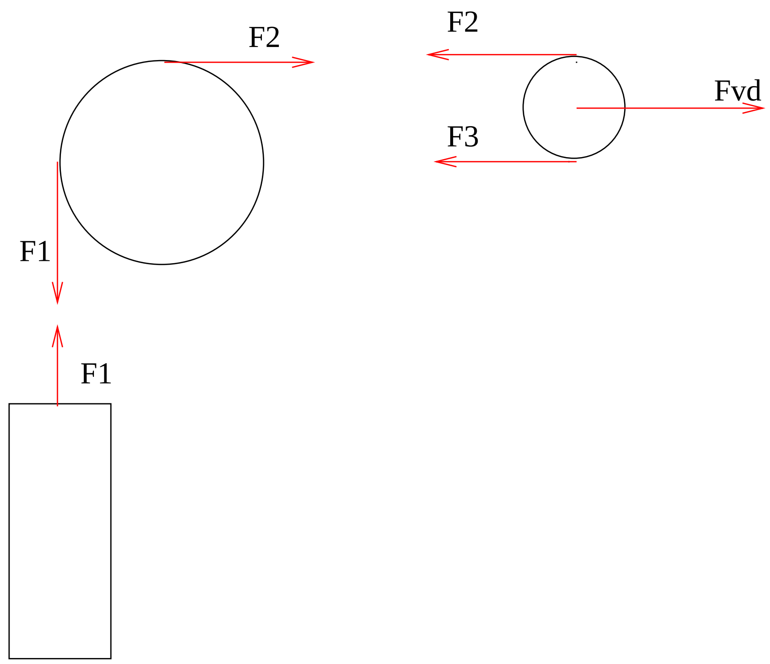
Symbool	**Waarde**	**Eenheid**
Massa m	5	[kg]
Massatraagheid katrol J_1	2	$[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$
Massatraagheid katrol J_2	1	$[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]$
Massa katrol J_2, m_2	2	[kg]
Veerstijfheid k	2000	$\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$
Dempingsconstante ρ	100	$\left[\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}}\right]$
$\hat{Y}$	0.05	[m].
ω	40	$\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}\right]$

Het systeem krijgt via het blok Y een beweging opgedrongen $y(t) = \hat{y} \cos \omega t$.

Gevraagd Bepaal de overdracht $\frac{\vec{X}}{\vec{Y}}$ in formulevorm.

2Gedwongen: Gedwongen trillingen 1

Antwoord:



Uit de bovenstaande vrijlichaamsschets volgt de onderstaande afleiding.

$$F_{vd} = k(y - z) + \rho(\dot{y} - \dot{z}) \tag{80}$$

$$\sum_{J_2} M = J\ddot{\theta}_2 = F_3 \cdot R_2 - F_2 \cdot R_2 \tag{81}$$

$$\sum_{J_2} F = m_2 \cdot \ddot{z} = F_{vd} - F_2 - F_3 \tag{82}$$

$$\sum_{J_1} M = J_1\ddot{\theta}_1 = F_2 \cdot R_1 - F_1 \cdot R_1 \tag{83}$$

$$\sum_m F == m\ddot{x} = F_1 \tag{84}$$

De som van 1e en 2e vergelijking levert:

$$\frac{J_2}{R_2^2}\ddot{z} + M_2\ddot{z} - F_{vd} = -2F_2 \tag{85}$$

Uit de derde vergelijking volgt:

$$\frac{J_1}{R_1}\frac{\ddot{x}}{R_1} = F_2 - F_1. \tag{86}$$

Combineren van de laatste drie vergelijkingen geeft

$$m\ddot{x} + \frac{J_1}{R_1^2}\frac{\ddot{x}}{}2 + \frac{J_2}{R_2^2}\frac{\ddot{x}}{4} + m_2\frac{\ddot{x}}{4} = \rho(\dot{y} - \frac{\dot{x}}{2}) + k(y - \frac{x}{2}) \tag{87}$$

De gevraagde overdracht wordt daarmee:

$$\frac{\vec{x}}{\vec{y}} = \frac{i\rho\omega + k}{-m^*\omega^2 + i\frac{\rho}{2}\omega + \frac{k}{2}} \tag{88}$$

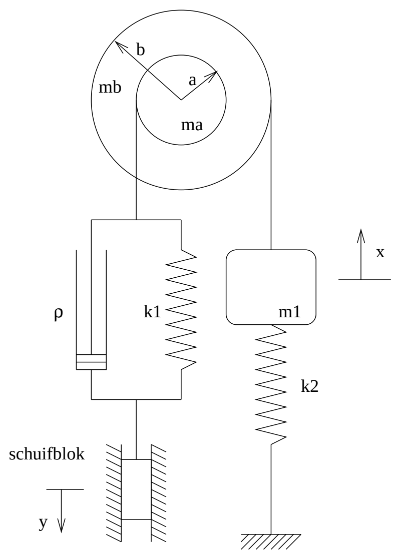
Hierin is

$$m^* = m + \frac{J_1}{2R_1^2} + \frac{J_2}{4R_2^2} + \frac{m_2}{4} \tag{89}$$

1 januari 1996

File : `2Gedwongen/o4a.tex`

Opgave 4.



In bovenstaande figuur wordt het systeem aangedreven via het schuifblokje aan de linkerzijde, dat de beweging $y(t) = \hat{x} \cdot \cos\omega \cdot t$ maakt.
De massa m_1 aan de rechterzijde hangt aan een koord dat over een schijf b met straal b en massa m_b geslagen is. Veer en demper aan de linkerzijde zitten aan de onderkant aan het schuifblokje en aan de bovenzijde aan een koord dat over een schijf a met straal a en een massa m_a geslagen is.

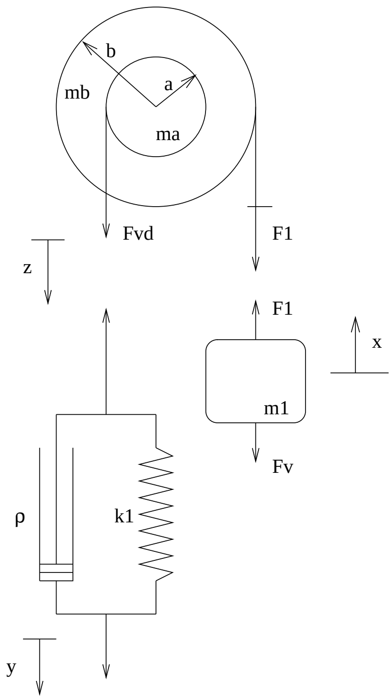
a Gevraagd de vrijlichaamschets inclusief alle reactiekrachten.

b De overdracht van de beweging van het schuifblokje y naar de beweging x van de massa in formule vorm.

2Gedwongen: Gedwongen trillingen 2

31 maart 2003

Antwoord:



Voeg coördinaat z toe ter plaatste van het boveneinde van demper en veer aan de rechterzijde. Naar beneden positief.

$$F_{vd} = k_1(y - z) + \rho(\dot{y} - \dot{z}) \tag{90}$$

Tussen z en x gelden de vaste relaties:

$$z = \frac{a}{b}x \tag{91}$$

en

$$\theta = \frac{z}{a} = \frac{x}{b}, \dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{a} = \frac{\dot{x}}{b}, \ddot{\theta} = \frac{\ddot{z}}{a} = \frac{\ddot{x}}{b} \tag{92}$$

Op de massa werken de krachten F_1 en F_v

$$\sum_{m_1} F = m_1\ddot{x} = -k_2 \cdot x + F_1 \tag{93}$$

Op de dubbele rol werken de volgend momenten:

$$\sum_{dubbelwiel} M = (J_a + J_b)\ddot{\theta} = -F_1 b + F_{vd} a \tag{94}$$

Hierin geldt:

$$J_a = \frac{1}{2} m_a a^2 \tag{95}$$

$$J_b = \frac{1}{2} m_b b^2 \tag{96}$$

Uit e.e.a. F_1 expliciet te maken:

$$F_1 = -\frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2} \cdot \ddot{x} + \frac{a}{b}F_{vd} \tag{97}$$

Door substitutie van F_{vd} wordt het:

$$F_1 = -\frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2} \cdot \ddot{x} + k_1(\frac{a}{b}y - \frac{a^2}{b^2}x) + \rho(\frac{a}{b}\dot{y} - \frac{a^2}{b^2}\dot{x}) \tag{98}$$

Daarmee wordt de D.V.:

$$(m_1 + \frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2})\ddot{x} + \rho\frac{a^2}{b^2}\dot{x} + (k_2 + \frac{a^2}{b^2}k_1)x = \frac{a}{b}(\rho\dot{y} + k_1 y) \tag{99}$$

De gevraagde overdracht:

$$\frac{\vec{X}}{\vec{Y}} = \frac{\frac{a}{b}(\rho i\omega + k_1)}{-m^*\omega^2 + \rho^* i\omega + k^*} \tag{100}$$

Daarin zijn de waarden van de gereduceerde grootheden:

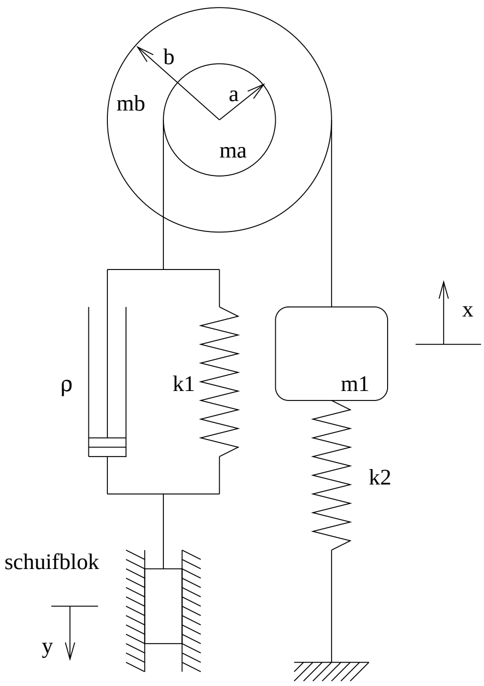
$$m^* = m_1 + \frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2} \tag{101}$$

$$\rho^* = \rho\frac{a^2}{b^2} \tag{102}$$

$$k^* = (k_2 + \frac{a^2}{b^2}k_1) \tag{103}$$

File : `2Gedwongen/o4.tex`

Opgave 5.



In bovenstaande figuur wordt het systeem aangedreven via het schuifblokje aan de linkerzijde, dat de beweging $y(t) = 0.3 \cdot \cos 20 \cdot m$ maakt.

De massa m_1 aan de rechterzijde hangt aan een koord dat over een schijf b met straal b en massa m_b geslagen is. Veer en demper aan de linkerzijde zitten aan de onderkant aan het schuifblokje en aan de bovenzijde aan een koord dat over een schijf a met straal a en een massa m_a geslagen is. Verder is gegeven:

Onderdeel	**Symbool**	**Waarde**	
Massa 1	m_1	3	[kg]
Massa schijf a	m_a	1	[kg]
Massa schijf b	m_b	4	[kg]
Straal schijf a	a	0.1	[m]
Straal schijf b	b	0.2	[m]
Veerstijfheid	$k_1 = k_2$	2000	$\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$
Dempingsconstante	ρ	15	$\left[\frac{\mathrm{N{\cdot}s}}{\mathrm{m}}\right]$

a Gevraagd de vrijlichaamschets inclusief alle reactiekrachten.

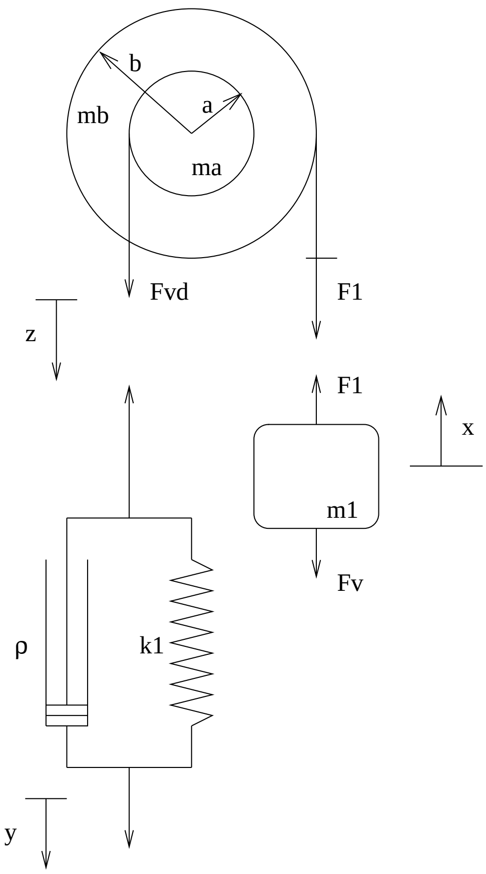
b De overdracht van de beweging van het schuifblokje y naar de beweging van de massa x in formule vorm.

c De amplitude van de beweging $x(t)$ van massa m_1.

2Gedwongen: Gedwongen trillingen 2

21 november 1996

Antwoord:



Voeg coordinaat z toe ter plaatste van het boveneinde van demper en veer aan de rechterzijde. Naar beneden positief.

$$F_{vd} = k_1(y - z) + \rho(\dot{y} - \dot{z}) \tag{104}$$

Tussen z en x gelden de vaste relaties:

$$z = \frac{a}{b}x \tag{105}$$

en

$$\theta = \frac{z}{a} = \frac{x}{b}, \dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{a} = \frac{\dot{x}}{b}, \ddot{\theta} = \frac{\ddot{z}}{a} = \frac{\ddot{x}}{b} \tag{106}$$

Op de massa werken de krachten F_1 en F_v

$$\sum_{m_1} F = m_1\ddot{x} = -k_2 \cdot x + F_1 \tag{107}$$

Op de dubbele rol werken de volgend momenten:

$$\sum_{dubbelwiel} M = (J_a + J_b)\ddot{\theta} = -F_1 b + F_{vd} a \tag{108}$$

Hierin geldt:

$$J_a = \frac{1}{2}m_a a^2 \tag{109}$$

$$J_b = \frac{1}{2}m_b b^2 \tag{110}$$

Uit e.e.a. F_1 expliciet te maken:

$$F_1 = -\frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2} \cdot \ddot{x} + \frac{a}{b}F_{vd} \tag{111}$$

Door subsititutie van F_{vd} wordt het:

$$F_1 = -\frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2} \cdot \ddot{x} + k_1(\frac{a}{b}y - \frac{a^2}{b^2}x) + \rho(\frac{a}{b}\dot{y} - \frac{a^2}{b^2}\dot{x}) \tag{112}$$

Daarmee wordt de D.V.:

$$(m_1 + \frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2})\ddot{x} + \rho\frac{a^2}{b^2}\dot{x} + (k_2 + \frac{a^2}{b^2}k_1)x = \frac{a}{b}(\rho\dot{y} + k_1 y) \tag{113}$$

De gevraagde overdracht:

$$\frac{\vec{X}}{\vec{Y}} = \frac{\frac{a}{b}(\rho i\omega + k_1)}{-m^*\omega^2 + \rho^* i\omega + k^*} \tag{114}$$

Daarin zijn de waarden van de gereduceerde grootheden:

$$m^* = m_1 + \frac{\frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{2}m_b b^2}{b^2} \tag{115}$$

$$\rho^* = \rho\frac{a^2}{b^2} \tag{116}$$

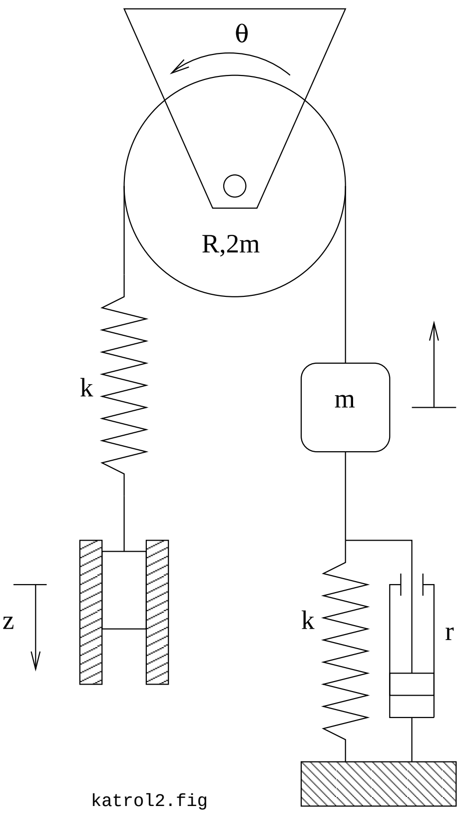
$$k^* = (k_2 + \frac{a^2}{b^2}k_1) \tag{117}$$

Het bepalen van de amplitude van de uitgaande beweging tengevolge van de aandrijvende functie y gaat met behulp van de modulus van de overdracht.

$$\hat{x} = \left|\frac{\vec{X}}{\vec{Y}}\right| \hat{y} = \frac{\frac{a}{b}\sqrt{k_1^2 + (\rho\omega)^2}}{\sqrt{(-m^*\omega + k^*)^2 + (\rho^*\omega)^2}} = 0.571[\mathrm{m}] \tag{118}$$

File : `2Gedwongen/o5.tex`

Opgave 6.



Het in bovenstaande figuur gegeven mechanisme wordt aangestoten met een verplaatsing $z(t) = \hat{Z}\cos\omega t$ met $\hat{Z} = 0.1$[m] en $\omega = 2\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}\right]$. Gegeven is: de massa van de katrol bedraagt $2m$=30[kg] , het blok heeft een massa van m=15[kg] , de beide veren hebben een stijfheid k=1600$\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$, en de dempingsverhouding β tengevolge van de dempingsconstante ρ bedraagt 0.25.

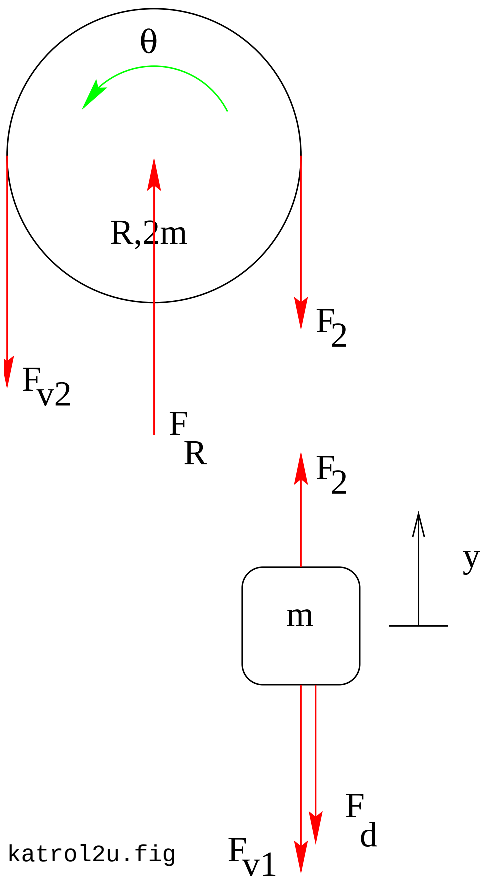
a Bereken de amplitude $\hat{y}$ van de verplaatsing van de massa m.

b Als de verplaatsing in A plotseling wordt stil gezet, met welke frequentie zal het systeem doortrillen voordat het ten gevolge van de demping geheel tot rust komt, met andere woorden wat is de gedempte eigenhoeksnelheid van dit systeem.

Gedwongen trillingen: 2 Gedwongen Trillingen

7 oktober 1997

Antwoord:



Vrijlichaamschets in bovenstaande figuur. Som krachten op massa:

$$\sum_m F = m\ddot{y} = F_2 - F_{v_1} - F_d \tag{119}$$

Op deze katrol kan alleen een moment een hoekversnelling veroorzaken. Een verplaatsing is er niet. Met de relatie $\theta = y/R$ kunnen we volstaan met:

$$\sum_J M = \frac{1}{2}2mR^2\ddot{\theta} = -F_2R + F_{v_2}R \tag{120}$$

Met de relatie tussen y en θ:

$$mR\ddot{y} = -F_2R + F_{v_2}R \Rightarrow F_2 = -m\ddot{y} + k(z-y) \tag{121}$$

Dit levert de d.v.:

$$2m\ddot{y} + \rho\dot{y} + 2ky = kz \tag{122}$$

en de overdracht:

$$\frac{Y}{Z} = \frac{k}{-2m\omega^2 + i\rho\omega + 2k} \tag{123}$$

Uit de definitie van β is de dempingsconstante ρ te bepalen. $\rho = 155\left[\frac{\mathrm{N.s}}{\mathrm{m}}\right]$ Met de verhouding van de amplitudes kunnen we de amplitude in y bepalen:

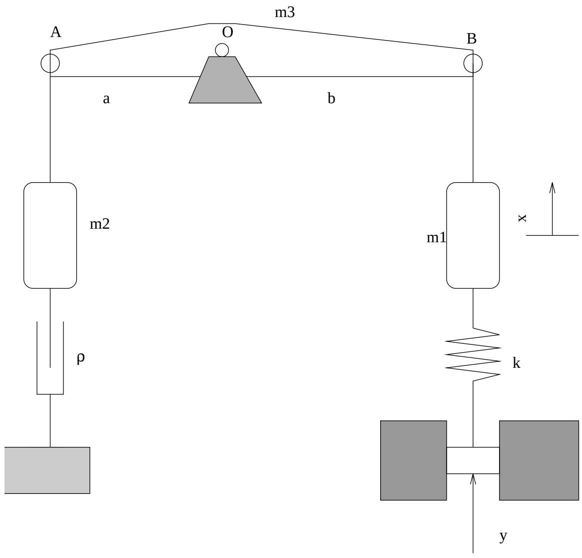
$$\frac{\hat{Y}}{\hat{Z}} = \left|\frac{k}{-2m\omega^2 + i\rho\omega + 2k}\right| = \frac{k}{\sqrt{(2k-2m\omega^2)^2 + (\rho\omega)^2}} \Rightarrow \hat{Y} = 5.17[\mathrm{cm}] \tag{124}$$

De gedempte hoeksnelheid wordt bepaald door

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k^*}{m^*} - \left(\frac{\rho^*}{2m^*}\right)} = \omega_n \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\frac{2k}{2m}} \cdot \sqrt{1-0.25^2} = 10 \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right] \tag{125}$$

File : `3Gedwongen/o1.tex`

Opgave 1.



Het system in bovenstaande figuur heeft de volgende eigenschappen:

- De demper aan de linkerzijde zit tussen massa m_2 en vloer.
- Het systeem wordt aangedreven via de veer aan de rechterzijde met een beweging $y = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ welke verbonden is aan de onderzijde van massa m_1.
- De massa van de hefboom is m_3, en de gyratiestraal bedraagt r_0 bij rotatie om het draaipunt O.

De getallen voor de systeemcomponenten zijn gegeven in tabel 1.

Kenmerk	Waarde	Dimensie
m_1	50	[kg]
m_2	30	[kg]
m_3	15	[kg]
r_0	0.25	[m]
a	0.8	[m]
b	1	[m]
k	10	$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right]$
ρ	800	$\left[\frac{\text{N·s}}{\text{m}}\right]$
$\hat{y}$	0.1	[m]
ω	10	$\left[\frac{1}{\text{s}}\right]$

Tabel 1: Systeemkentallen

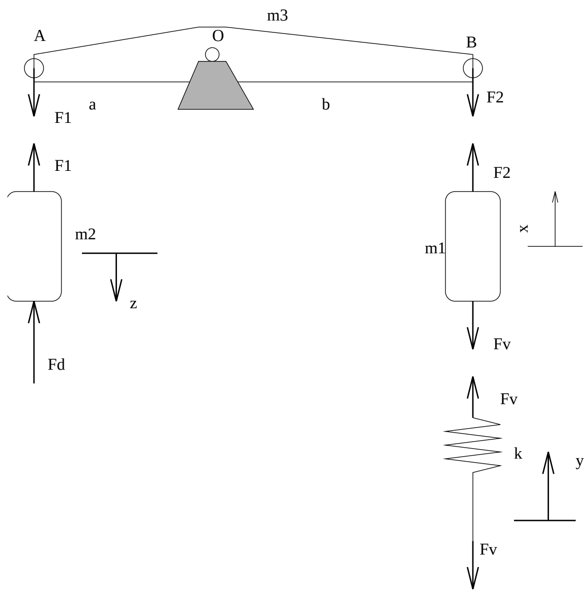
a Maak de vrijlichaamschets.

b Bepaal de vervangende massa, demping en veerstijfheid van dit systeem, gereduceerd naar de verplaatsing in x.

c Bepaal de overdracht van de beweging y op de beweging x van massa m_1.

d Bepaald de grootte van de maximale kracht in de veer. Hint: bepaal de overdracht van de verplaatsing in y naar het verschil in verplaatsing in x en y.

Antwoord:
Bij het maken van de vrijlichaamschets veronderstellen we een verplaatsing x die voorloopt op de verplaatsing y, en een positieve snelheid in $\dot{x}$.



Drie maal toepassen van de wet van newton levert de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{m_2} F &= m_2 \ddot{z} = -F_1 - \rho \cdot \dot{z} = -F_1 - \rho \cdot \tfrac{a}{b} \cdot \dot{x} \\
&= m_2 \cdot \tfrac{a}{b} \ddot{x} \\
\Sigma_{m_3} M &= m_3 \cdot r_0^2 \cdot \ddot{\theta} = F_1 \cdot a - F_2 \cdot b \\
&= m_3 \cdot r_0^2 \cdot \tfrac{\ddot{x}}{b} \\
\Sigma_{m_1} &\; F = m_1 \cdot \ddot{x} = F_2 - F_v = F_2 - k(x - y)
\end{aligned}$$

Hieruit lossen we F_1 op:

$$F_1 = -m_2 \frac{a}{b} \cdot \ddot{x} - \rho \cdot \frac{a}{b} \cdot \dot{x} \tag{126}$$

Daarmee volgt uit voor F_2

$$F_2 = \frac{1}{b} \cdot (F_1 \cdot a - m_3 \cdot r_0^2 \cdot \frac{\ddot{x}}{b}) = \frac{1}{b} \cdot (-m_2 \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \ddot{x} - \rho \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \dot{x} - m_3 \cdot r_0^2 \cdot \frac{\ddot{x}}{b}) \tag{127}$$

Dit levert tot slot een differentiaalvergelijking op:

$$\left(m_1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot m_2 + \left(\frac{r_0}{b}\right)^2 \cdot m_3 \right) \cdot \ddot{x} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \rho \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot y \tag{128}$$

Hieruit volgen de waarden voor gereduceerde massa, demping en stijfheid:

$$m^* = m_1 + (\frac{a}{b})^2 \cdot m_2 + (\frac{r_0}{b})^2 \cdot m_3 = 70,13\,[\mathrm{kg}] \tag{129}$$

$$\rho^* = (\frac{a}{b})^2 \cdot \rho = 512 \left[\frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}}\right] \tag{130}$$

$$k^* = k \tag{131}$$

Uit de D.V. volgt vrijwel onmiddelijk de overdracht:

$$\frac{x}{y} = \frac{k}{-m^* \cdot \omega^2 + i \cdot \rho^* \cdot \omega + k^*} \tag{132}$$

De veerkracht $F_v = k(x-y)$ dus de veerkracht ten gevolge van de gedwongen beweging y is dan

$$\frac{F_v}{y} = \frac{k(x-y)}{y} = k \cdot \left\{ \frac{k - (m^* \cdot \omega^2 + i \cdot \rho^* \cdot \omega + k^*)}{-m^* \cdot \omega^2 + i \cdot \rho^* \cdot \omega + k^*} \right\} \tag{133}$$

$$= k \cdot \frac{m^* \cdot \omega^2 - i \cdot \rho^* \cdot \omega}{-m^* \cdot \omega^2 + i \cdot \rho^* \cdot \omega + k^*} \tag{134}$$

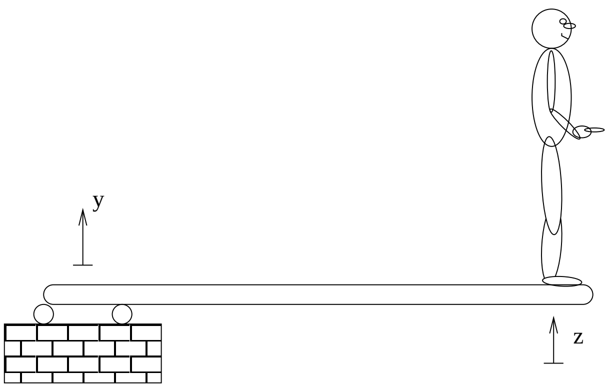
Hiermee wordt de amplitude in de veerkracht

$$\hat{F}_v = \hat{y} \left| \frac{F_v}{y} \right| = \hat{y} \cdot k \cdot \frac{\sqrt{(m^* \omega^2)^2 + (\rho^* \cdot \omega)^2}}{\sqrt{(-m^* \cdot \omega^2 + k^*)^2 + (\rho^* \cdot \omega)^2}} = 2906\,[\mathrm{N}] \tag{135}$$

17 oktober 1996

File : `3Gedwongen/o2.tex`

Opgave 2.



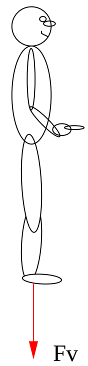
Stel de zwaartekrachtversnelling op 10 $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$.
In de bovenstaande figuur is een persoon getekend op een springplank van een zwembad. Als de persoon op het uiteinde van de plank staat, zakt deze 0.07 [m] door. De demping in de plank is te verwaarlozen. De plank zelf is op te vatten als een bladveer zonder massa.
Tijdens een middagje zwemmen treedt er een aardschok op, die ter plekke van het zwembad tijdelijk voor te stellen is als $y(t) = 0.008 \cdot \cos(12 \cdot t)$. Amplitude in meter, hoeksnelheid in radialen.

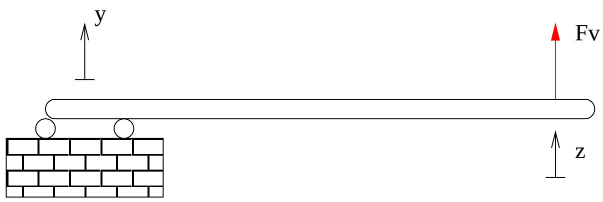
a Maak de vrijlichaamschets van de persoon op de plank.

b Wat is de amplitude $\hat{Z}$ van de beweging die de persoon op de plank voelt.

26 september 1997

Antwoord:
Vrijlichaamschets: zie onderstaande figuur.





De krachten:

$$\sum_{m,V} = m \cdot \ddot{z} = -F_v \Rightarrow m \cdot \ddot{z} + k \cdot z = k \cdot y \tag{136}$$

Dit levert de overdracht:

$$\frac{\vec{Z}}{\vec{Y}} = \frac{k}{-m \cdot \omega^2 + k} = \frac{1}{-\nu^2 + 1} \tag{137}$$

Daarmee is de relatie tussen de ingaande amplitude van 8 mm en de beweging van de persoon op de plank:

$$|H| \frac{\hat{Z}}{\hat{Y}} = \left| \frac{1}{-\nu^2 + 1} \right| \tag{138}$$

De eigenhoeksnelheid is te bepalen aan de hand van de doorzakking in rust. De belasting op de plank is $m \cdot g$, de zakking $\delta = 7[\text{cm}]$ zodat de veerstijfheid is $k = m \cdot g / \delta \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$

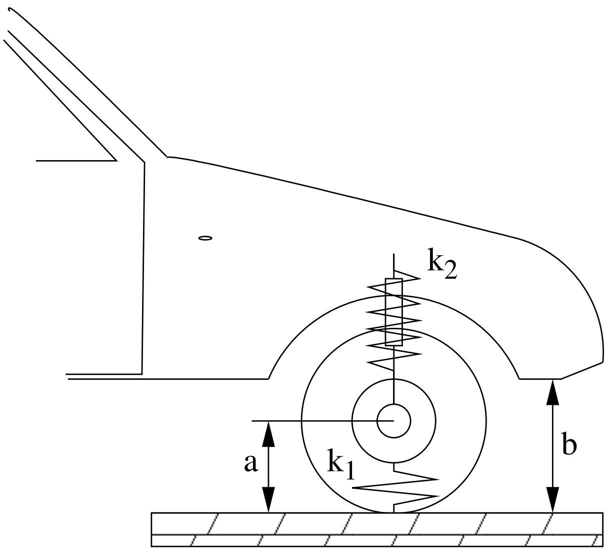
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{\delta \cdot m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \tag{139}$$

Uit $\nu = \frac{\omega}{\omega_n}$ en de bovenstaande berekening van ω_n volgt:

$$|H| = \left| \frac{1}{-\frac{\omega^2 \cdot \delta}{g} + 1} \right| = \left| \frac{1}{-\frac{12^2 \cdot 0.07}{10} + 1} \right| = 125 \tag{140}$$

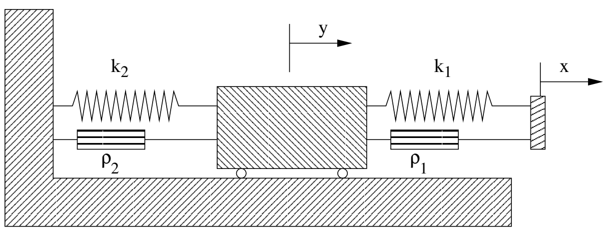
Daarmee wordt de amplitude van de persoon op de plank $125 \cdot 8[\text{mm}] = 1[\text{m}]$!
File : `3Gedwongen/o3.tex`

Opgave 3.



Stel de zwaartekrachtversnelling op 10 $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$.
In bovenstaande figuur is de voorzijde van een auto weergegeven. Piet en Marietje doen een proef. Als Marietje op het spatbord gaat zitten dan meet Piet dat de afmeting a (midden naaf tot grond) 3[mm] afneemt en de afmeting b (onderzijde carrosserie) met 9[mm] afneemt. Marietje weegt 57[kg]. Veronderstel dat de 'last' geheel op dit ene rechtervoorwiel drukt.

a Wat is de veerstijfheid k_1 van de band en wat is de veerstijfheid k_2 van de vering van de auto.
In de figuur is de demping in de band weggelaten, maar alleen maar om de figuur overzichtelijk te houden. Elke veer k_1 en k_2 is parallel geschakeld met zijn eigen demper ρ_1 en ρ_2.



voorwielmodel

In de tweede figuur is een vereenvoudigd model van het bewegingssysteem weergegeven. De massa m is de massa van wiel + bewegend gedeelte van de ophanging. Daarbij de is bewegingsrichting horizontaal. In het nu volgende gedeelte van de opgave zal de weg een sinusvormige beweging maken. Dit is het punt x waarin de beweging in het systeem wordt ingebracht. De omgeving mag als stilstaand verondersteld worden.

b Maak hiervan een vrijlichaamschets en bepaal tevens de uitdrukking voor de krachten van de veer k_1 en demper ρ_1 *Hint: kies een moment in de verplaatsing en de snelheid van x en y naar links zijn en waarin de ingaande beweging x groter is als de uitgaande beweging y.*

c Stel aan de hand van de vrijlichaamschets de differentiaalvergelijking in x en y op.

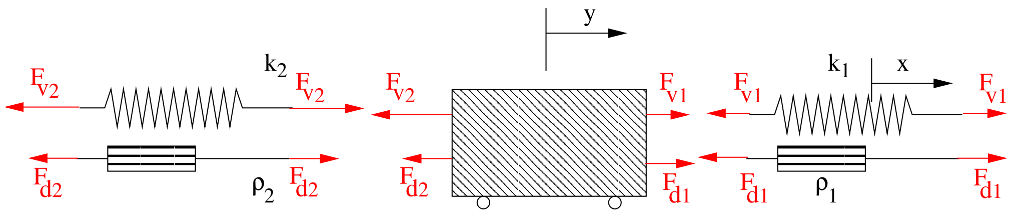
d Stel de overdrachtsvergelijking y ten gevolge van x $\frac{y}{x}$ voor dit systeem op en ook de formule voor de verhouding van de amplitude van de beweging van de naaf ten gevolge van de amplitude van de weg. ($\left|\frac{y}{x}\right|$)

09 april 2003

Antwoord:

antwoord a De belasting is $57 \times 10 = 570$[N]. De zakking van de band is 3[mm] dus de stijfheid $k_1 = \frac{570}{0.003} = 190000 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$. Voor de zakking van de carrosserie geldt dat deze gevormd wordt door de indrukking van veer 1 en 2. Veer twee wordt dus 6[mm] ingedrukt, waarmee de stijfheid $k_2 = 85000 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ bedraagt.

antwoord b De vrijlichaamschets staat in onderstaande figuur.



voorwielmodelu

Als de verplaatsing x en snelheid $\dot{x}$ groter zijn dan de verplaatsing y en de snelheid $\dot{y}$, dan trekken veer 1 en demper 1 naar rechts. De uitdrukkingen voor de veer- en demperkracht luiden daarmee:

$$F_{v1} = k_1 \cdot (x - y) \quad (141)$$

$$F_{d1} = \rho 1 \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \quad (142)$$

antwoord c De som van de krachten volgens de geschetse vrijlichaamschets:

$$\sum_m = -F_{v2} - F_{d2} + F_{v1} + F_{d2} = \quad (143)$$

$$m \cdot \ddot{y} = -k_2 \cdot y - \rho_2 \cdot \dot{y} + k_1 \cdot (x - y) + \rho_1 \cdot (\dot{x} - \dot{y}) \quad (144)$$

Daarmee wordt de dv:

$$m \cdot \ddot{y} + (\rho_1 + \rho_2) \cdot \dot{y} + (k_1 + k_2) \cdot y = \rho_1 \cdot \dot{x} + k_1 \cdot x \quad (145)$$

antwoord d We maken gebruik van de substituties $y(t) = \vec{Y} e^{j\omega t}, \dot{y}(t) = i\omega \vec{Y} e^{i\omega t}, \ddot{y}(t) = -\omega^2 \vec{Y} e^{i\omega t}$ en hetzelfde voor x: $x(t) = \vec{X} e^{i\omega t}, \dot{x}(t) = i\omega \vec{X} e^{i\omega t}, \ddot{x}(t) = -\omega^2 \vec{X} e^{i\omega t}$

Dan ziet de dv er in eerste instantie als volgt uit:

$$\left(-m\omega^2 + i(\rho_1 + \rho_2)\omega + (k_1 + k_2)\right) \vec{Y} e^{i\omega t} = (i\omega\rho_1 + k_1) \vec{X} e^{i\omega t} \quad (146)$$

Daarmee wordt de overdracht

$$\frac{\vec{Y}}{\vec{X}} = \frac{i\omega\rho_1 + k_1}{-m\omega^2 + i(\rho_1 + \rho_2)\omega + (k_1 + k_2)} \quad (147)$$

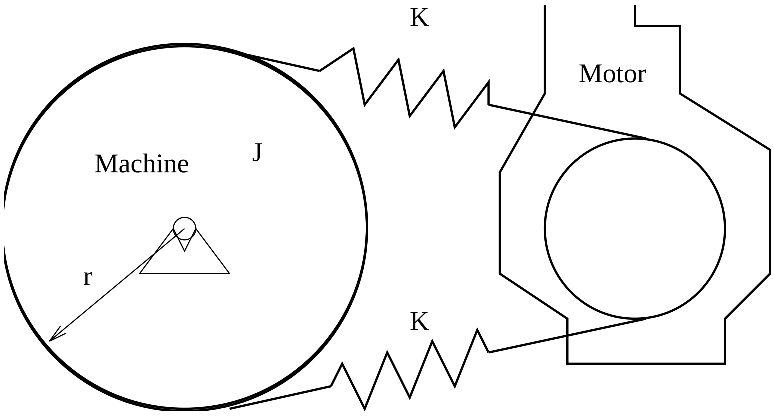
De amplitude verhouding is niets anders dan de modulus [1] van de overdracht. Door toepassen van de stelling van pythagoras op het reële en imaginaire deel van teller en noemer vinden we de uitdrukking voor de amplitude verhouding.

$$\frac{\hat{y}}{\hat{x}} = \left|\frac{\vec{Y}}{\vec{X}}\right| = \frac{\sqrt{k_1^2 + (\rho_1\omega)^2}}{\sqrt{(k_1 + k_2 - m\omega^2)^2 + ((\rho_1 + \rho_2)\omega)^2}} \tag{148}$$

[1] modulus= lengte van de vector in het complexe vlak

File : `4Isolatie/o1.tex`

Opgave 1.



In het bovenstaande systeem wordt een machinevliegwiel aangedreven door een verbrandingsmotor. Deze motor draait met een constant toerental van 1500 omwentellingen per minuut, met daarop gesuperponeerd een cosinusvormige rimpel met een trillingsfrequentie van 50 Hertz ($= 100 \cdot \pi s^{-1}$). De rimpelamplitude bedraagt 1/100 omwenteling. Van het aangedreven werktuig werktuig wordt een rimpelvrije loop verwacht, reden waarom de ontwerper gekozen heeft voor aandrijving middels drijfriemen. De vraag is nu of deze drijfriemen "stijf" dan wel "slap" gemaakt moeten worden. De stijfheid van de riem is te modelleren als twee veren met stijfheid k op de plaats van de twee riemparten in bovenstaand plaatje. De massatraagheid J van de machine bedraagt 250 $kg \cdot m^2$. De overbrengverhouding is 1 op 2. (Motor loopt twee maal zo snel als machine). De straal r van het vliegwiel met massatraagheidsmoment J bedraagt 1 meter.

a Maak een vrijlichaamschets van bovenstaand probleem.

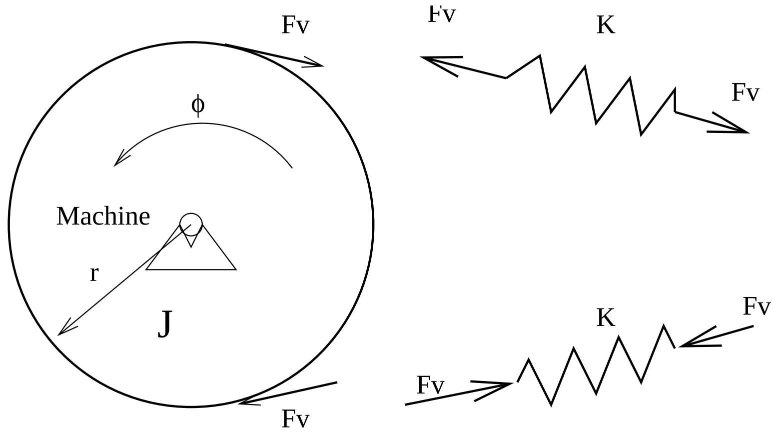
b Bepaal de overdrachtsvergelijking van de rimpel naar de aangedreven machine.

c Bepaal de stijfheid van de veren (= stijfheid van de aandrijfriemen), indien de trillingsamplitude in de aangedreven machine ten hoogste 1/1000 omwenteling mag bedragen.

4Isolatie: Isolatie en trillingsdoorleiding

Antwoord:

Bij het tekenen van de vrijlichaamschets is de hoekverdraaiing in positieve zin tegen de klok in gedefiniëerd. (Zie onderstaande figuur).



Zoals gewoonlijk geven we het systeem in gedachten een verplaatsing (nu verdraaiing dus) in positieve coördinaatrichting. Beide veren verzetten zich aldus tegen deze verdraaiing, en wel elk met een moment $M_v = r \cdot F_v = r \cdot k \cdot \theta \cdot r$
De daarin gehanteerde rotatie of torsieveerstijfheid is dan $k \cdot r^2$, te weten een moment per eenheid van hoekverdraaiing. De verlenging van de veer bedraagt dan $\Delta l = \Theta_1 \cdot r - \Theta_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r$ Daarmee wordt de veerkracht

$$F_v = k \cdot r \cdot (\Theta_1 - \frac{\Theta_2}{2}) \tag{149}$$

Voor de twee riemparten levert dit natuurlijk twee maal deze bijdrage.
Daarmee wordt de momentenstelling voor dit systeem:

$$\Sigma_J M = J \cdot \ddot{\Theta}_1 = -2 \cdot F_v \cdot r = 2 \cdot k \cdot r^2 \cdot (\Theta_1 - \frac{\Theta_2}{2}) \tag{150}$$

Daarmee wordt de bewegingsvergelijking:

$$J \cdot \ddot{\Theta} + 2 \cdot k \cdot r^2 \Theta_1 = k \cdot r^2 \Theta_2 \tag{151}$$

Daarmee wordt de overdracht

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{k \cdot r^2}{-J \cdot \omega^2 + 2 \cdot k \cdot r^2} \tag{152}$$

De eigenhoeksnelheid van dit dynamische systeem bedraagt nu

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot r^2}{J}} \tag{153}$$

Het antwoord van de vraag is dan te verkrijgen door het oplossen van vergelijking

$$\left| \frac{k \cdot r^2}{-J \cdot \omega^2 + 2 \cdot k \cdot r^2} \right| < \frac{1}{10} \tag{154}$$

Dit is ook uit te drukken in de hoeksnelheidverhouding $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\left| \frac{\frac{1}{2}}{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1} \right| < \frac{1}{10} \tag{155}$$

Aan de voorwaarde is voldaan als $(\frac{\omega}{\omega_0})^2 \geq 6$
De rotatiestijfheid $k^* = k \cdot r^2$ volgt dan uit:

$$\boxed{k^* = k \cdot r^2 < m^* \cdot \omega_0^2 = J \cdot \frac{\omega^2}{6} = 250 \cdot \frac{(100 \cdot \pi)^2}{6} = 4,1 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}\right] \quad (156)}$$

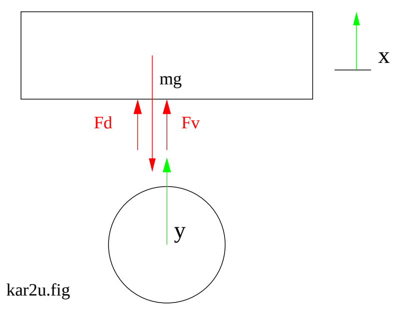
17 oktober 1996

File : `4Isolatie/o2.tex`

Opgave 2. Een bagagekarretje zakt bij het beladen met een plunjezak met een massa van 75 [kg] kg 3 [mm] door de veren. De totale massa van het beladen karretje is 500 [kg] . Met dit karretje wordt met een snelheid van 36 [km/h] over een weg met dwars lopende ribbels. De golflengte van de ribbels in de weg bedraagt 1 [m] , de amplitude 20 [mm] . De dempingsverhouding β van het karretje bedraagt 0.8. Neem voor de zwaartekrachtversnelling 10 $[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}]$.
a. Hoe groot is de amplitude van de verticale beweging van het karretje. Veronderstel dat de wielen ten allen tijde contact met de weg houden.
b. Wat is de kritische snelheid voor dit karretje (waarbij de amplitude maximaal wordt)? **(In dit onderdeel mag de demping verwaarloosd worden!)**

4Isolatie: Isolatie en trillingsdoorleiding

Antwoord:
In de vrijlichaamschets



zijn de demp- en veerkracht getekend. De dempkracht is $F_d = \rho \cdot (\dot{x} - \dot{y})$, de veerkracht $F_v = k \cdot (x - y)$. De D.V. wordt dan:

$$m \cdot \ddot{x} + \rho \cdot \dot{x} + k \cdot x = \rho \cdot \dot{y} + k \cdot y \quad (157)$$

De veerstijfheid in dit geval is te berekenen uit de zakking bij belading met 75 kg = 750 N.

$$k = \frac{750}{0.003} = 250 \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}}\right] \quad (158)$$

De eigenhoeksnelheid van het karretje is:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{250 \cdot 10^3}{500}} = 10\sqrt{5} \quad (159)$$

De statische overdracht wordt ten gevolge van de D.V.:

$$H = \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = \frac{i \cdot \rho \cdot \omega + k}{-m \cdot \omega^2 + i \cdot \rho \cdot \omega + k} \tag{160}$$

De amplitude in x wordt dan:

$$\hat{X} = \hat{Y} \cdot \frac{\sqrt{k^2 + (\rho \cdot \omega)^2}}{\sqrt{(k - m \cdot \omega^2)^2 + (\rho \cdot \omega)^2}} = \hat{Y} \cdot 0.56 \tag{161}$$

De aanstoothoeksnelheid is $2 \cdot \pi \cdot 36000/3600 = 20 \cdot \pi \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$. De amplitude y is 0.02 [m] . Daarmee wordt de amplitude van het karretje:

$$\hat{X} = 0.56 \cdot 0.02 = 0.012 \,[\text{m}] \tag{162}$$

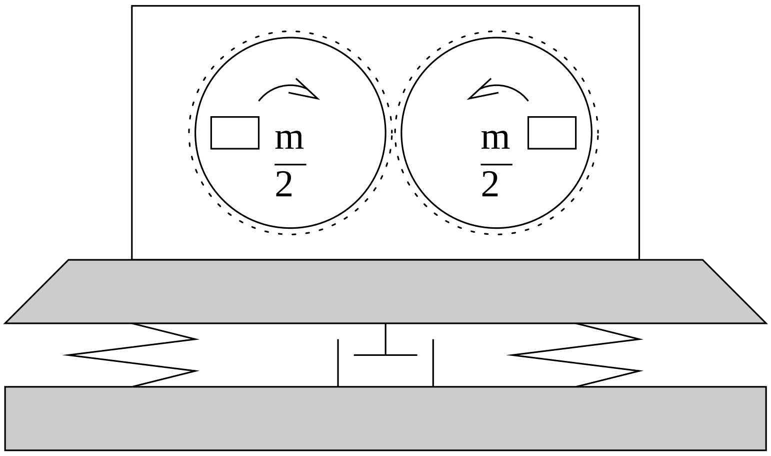
De kritische snelheid (demping verwaarloosd!)=

$$v_k r = \frac{\omega_n}{2\pi} \cdot 3600/1000 = 12.8 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right] \tag{163}$$

16 november 1992

File : `4Isolatie/o3.tex`

Opgave 3.



De werking van een trilplaat ter verdichting van de bodem of voor het aantrillen van straatklinkers berust op de werking van een onbalans. Door twee onbalansen middels een overbrenging aan elkaar te koppelen zodat de draairichting van de onbalansen tegengesteld is aan elkaar, kan ervoor gezorgd worden dat er alleen een vertikale krachtkomponent overblijft.
Van een trilplaat zijn de volgende gegevens bekend:

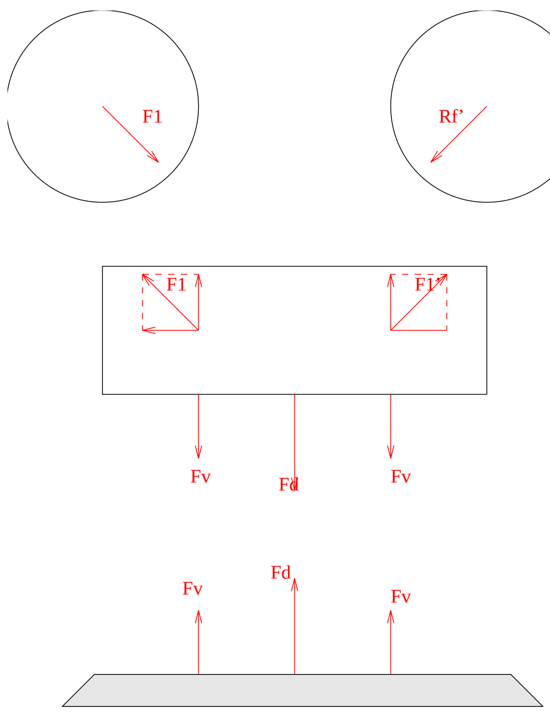
Symbool	Waarde
Totale massa trilplaat m_1	$200[kg]$
Massa van de onbalansen tesamen m_2	$20[kg]$
Excentriciteit onbalansen r	$0.1[m]$
Hoeksnelheid onbalans ω	$20\pi[rad/sec]$
Totale veerstijfheid k	$20\left[\frac{kN}{m}\right]$
Totale dempingsconstante ρ	$1000\left[\frac{Ns}{m}\right]$

Gevraagd Bereken de amplitude $\hat{F}$ van de vertikale kracht op de bodemplaat.

4Isolatie: Isolatie en trillingsdoorleiding

1 januari 1996

Antwoord:
Vrijlichaamschets:



In de vrijlichaamschets zijn de krachten (F_1 en F_1') te vinden die veroorzaakt worden door de onbalansen (in een willekeurige, maar spiegelbeeldige stand). De grootte van de krachten $F_1 = m_2 \cdot r \cdot \omega^2$. Doordat de twee onbalansen steeds in een over de vertikaal gespiegelde stand staan, valt de horizontale component weg, en resulteert als vertikale component:

$$F_r = m_2 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{164}$$

Op de hoofdmassa van de trilplaat werken zodoende drie vertikale krachten, de kracht van de onbalans, de kracht van de demper en de kracht van de veren (symetrisch getekend).

$$\sum_m F = m \cdot \ddot{x} = m_2 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) - F_v - F_d \tag{165}$$

Met $F_v = k \cdot x$ en $F_d = \rho \dot{x}$ wordt de differentiaalvergelijking:

$$m_1 \cdot \ddot{x} + \rho \cdot \dot{x} + k \cdot x = m_2 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{166}$$

De stationaire oplossing van deze dv luidt:

$$x(t) = \frac{m_2 \cdot r \cdot \omega^2}{-m_1 \cdot \omega^2 + i \cdot \rho \cdot \omega + k} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \tag{167}$$

De kracht op de bodemplaat wordt gevormd door de som van demper en veerkrachten. Deze kunnen we uit de oplossing berekenen, immers $F_v = k \cdot x$ en $F_d = \rho \cdot \dot{x}$. Differentiëren in deze overdrachtsformules komt overeen met vermenigvuldigen met $i\omega$

$$F_b = \rho \cdot \dot{x} + k \cdot x \tag{168}$$

In het complexe vlak levert dit:

$$\vec{F_b} = i \cdot \omega \cdot x + k \cdot x = m_2 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \frac{i\rho\omega + k}{-m_1\omega^2 + i\rho\omega + k} \tag{169}$$

De amplitude van deze vloerkracht wordt dan:

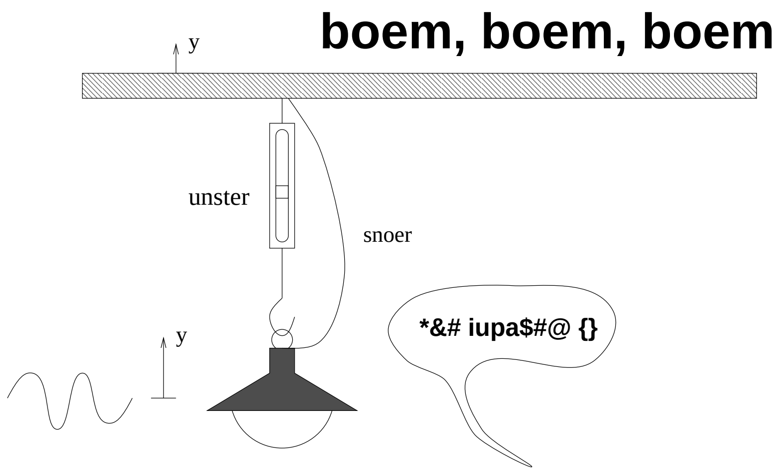
$$|F_b| = m_2 \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{\frac{(\rho\omega)^2 + k^2}{(-m_1\omega^2 + k)^2 + (\rho\omega)^2}} \tag{170}$$

$$= 20 \cdot 0.1 \cdot (20\pi)^2 \sqrt{\frac{(1000 \cdot 20 \cdot \pi)^2 + 20000^2}{(-200 \cdot (20 \cdot \pi)^2 + 20000)^2 + (1000 \cdot 20 \cdot \pi)^2}} \tag{171}$$

$$= 674\,[\mathrm{N}] \tag{172}$$

Blijkbaar draait deze vloertrilmachine niet in de buurt van zijn eigenhoeksnelheid.
File : `4Isolatie/o4.tex`

Opgave 4. Een aantal studenten woont in een hoogbouwflat en is zeer enthousiast over de mogelijkheden die het leven biedt. Ze nodigen dan ook regelmatig een aantal meiden uit om eens lekker te swingen. In het licht van de tijd wordt er natuurlijk regelmatig "house"-muziek gedraaid.



Karakteristiek van housemuziek is, dat een dergelijk kabaal in een fabriek vanwege de arbeidsinspectie verboden wordt, maar dit terzijde. Een tweede karakteristiek is 3 keer "boem" per seconde. De lot wil dat een verdieping lager een enigszins overspannen docent woont, die wat meetapparatuur heeft weten te regelen. Hij wil bewijsmateriaal verzamelen, zodat het "housen" verboden kan worden door de huismeester. Daartoe heeft hij zijn plafondlamp middels een unster (een veerweegtoestel) aan het plafond gehangen. Bij het ophangen van de lamp rekt de unster 2.8[cm] uit.

Stel de zwaartekracht op 10 $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$. Daarop blijkt dat de lamp tijdens het housen een beweging maakt met een amplitude van 10 millimeter, hetgeen duidelijk waarneembaar is. De docent verwacht dat de huismeester, een eenvoudige maar verder vriendelijke ziel, hiermee te overtuigen is.

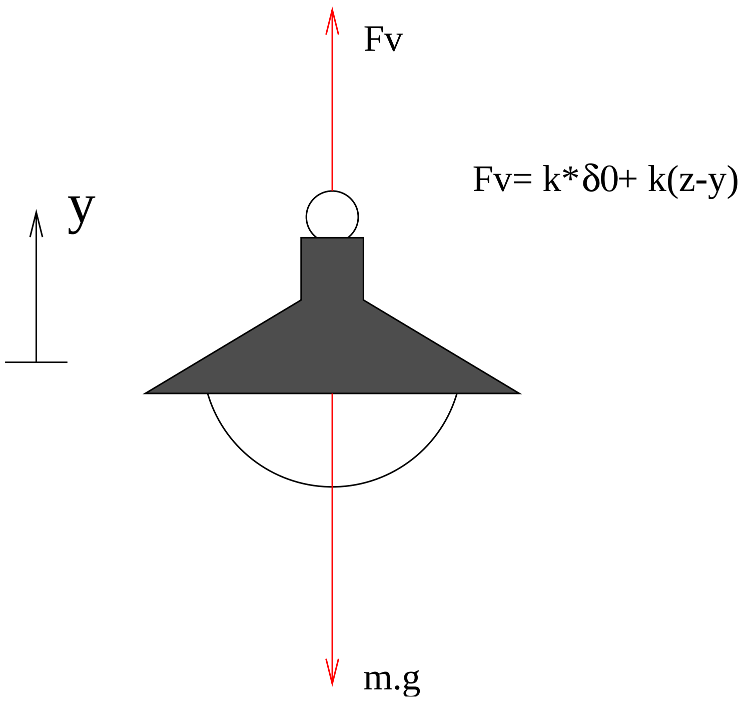
a Maak een vrijlichaamschets van de situatie.

b Hoe groot is de amplitude van de beweging van het plafond als je de "boem" op mag vatten als een sinusvormige trilling met een frequentie van $3 \cdot 2 \cdot \pi$ radialen per seconde?

c Er is een slimme techniekstudent bij. Wat is zijn verweer tegen het door de docent aangedragen bewijsmateriaal.

4Isolatie: Isolatie en trillingsdoorleiding

Antwoord:
a De vrijlichaamschets is te flauw om over naar huis te schrijven.



b. Uit de uitrekking δ_0 van de unster en de zwaartekrachtversnelling g is de eigenhoeksnelheid te bepalen.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{m \cdot g}{\delta_0}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}} \tag{173}$$

Het probleem is vervolgens een isolatieprobleem, waardoor formule 14 uit de bijlagen van toepassing is. Er is echter geen demping, zodat de eenvoudigere vorm

$$H = \frac{Y}{Z} = \frac{1}{1-\nu^2} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \tag{174}$$

gebruikt kan worden. Met het bovenstaande is de overdracht te berekenen.

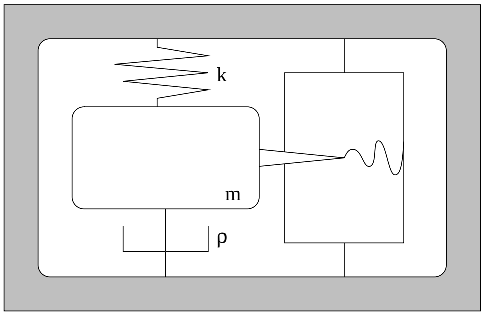
$$H = \frac{1}{1 - \frac{(6\pi)^2}{10/0.028}} = 194.4. \tag{175}$$

De amplitude van de vloer bedraagt dus slechts $0.01/194.4 = 51\mu m$.
c Aan de huismeester wordt uitgelegd, dat het altijd mogelijk is een massa-veersysteem te maken dat voor een bepaalde trilling een grote versterking oplevert en dat de uitslag van 10 millimeter niks zegt over de feitelijke herrie die gemaakt wordt.

23 november 1997

File : `5Meet/o1.tex`

Opgave 1.
Trillingsisolatie en meting



Het in bovenstaande figuur gegeven seismisch instrument dient ter meting van de beweging in de vertikale richting. De pen zal de beweging van de massa ten opzichte van het huis op het papier op de verticale roterende cilinder schrijven.
Gevraagd Leidt de overdracht van de verplaatsing van het huis $\hat{z}$ naar de relatieve beweging $\hat{x}$ ten opzichte van het huis af. Dit is de beweging die de pen ten opzichte van het papier maakt.

5Meet: Meetinstrumenten op basis van massaveersystemen

18 okt 1995

Antwoord:
In het formuleblad (formule 14) vinden we de overdracht van beweging van vloer naar beweging van de massa bij een op veer en demper opgelegde massa. Noemen we de beweging van de vloer en dus het huis z en de beweging van de massa y, dan is de relatieve beweging van massa ten opzichte van het huis (en dus de beweging van de pen op papier) $x = y - z$. De gevraagde overdracht is dan $\frac{x}{z} = \frac{y-z}{z}$

$$\frac{\vec{x}}{\vec{z}} = \frac{\vec{y}-\vec{z}}{\vec{z}} \tag{176}$$

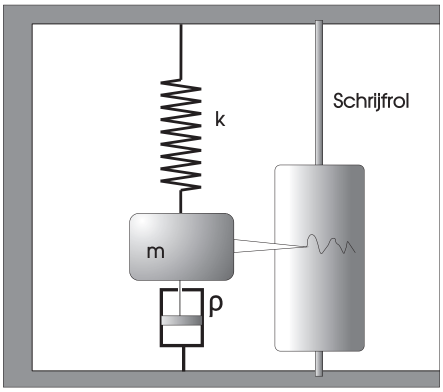
$$= \frac{i\rho\omega + k}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k} - 1 \tag{177}$$

$$= \frac{i\rho\omega + k}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k} - \frac{-m\omega^2 + i\rho\omega + k}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k} \tag{178}$$

$$= \frac{m \cdot \omega^2}{-m \cdot \omega^2 + i \cdot \rho\omega + k} \tag{179}$$

Hierin is y de absolute beweging van de massa, x de relatieve beweging van massa t.o.v. huis en z de absolute beweging van het huis.
File : `5Meet/o2.tex`

Opgave 2.



Het in bovenstaande figuur gegeven seismisch instrument dient ter meting van de beweging in de verticale richting. De pen zal de beweging van de massa ten opzichte van het huis op het papier op de verticale roterende cilinder (de schrijfrol) schrijven. De vloer (en dus het huis met papierrol) beweegt vertikaal volgens $y(t) = 0.01 \cdot \cos 16t$ De beweging van de verend opgehangen massa is $x(t)$. Verder is gegeven:

Symbool	**Waarde**	**Eenheid**
Massa m	50	[kg]
Veerstijfheid k	12800	$\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$
Dempingsconstante ρ	10	$\left[\frac{\mathrm{N{\cdot}s}}{\mathrm{m}}\right]$

Gegeven is de overdracht van de beweging $y(t)$ van het huis naar de absolute beweging van de massa $x(t)$.

$$\frac{x}{y} = \frac{i \cdot \rho \cdot \omega + k}{-m \cdot \omega^2 + i \cdot \rho \cdot \omega + k} \tag{180}$$

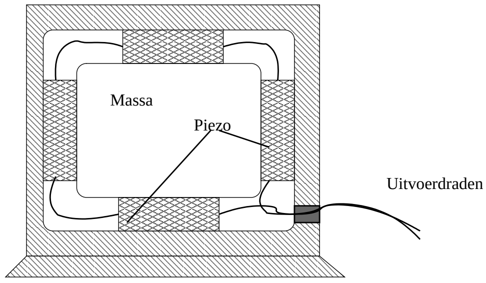
a Bepaal de amplitude van de beweging $z(t)$ van de pen ten opzichte van de schrijfrol.

5Meet: Meetinstrumenten op basis van massaveersystemen

18 okt 1995

File : `5Meet/o3.tex`

Opgave 3.



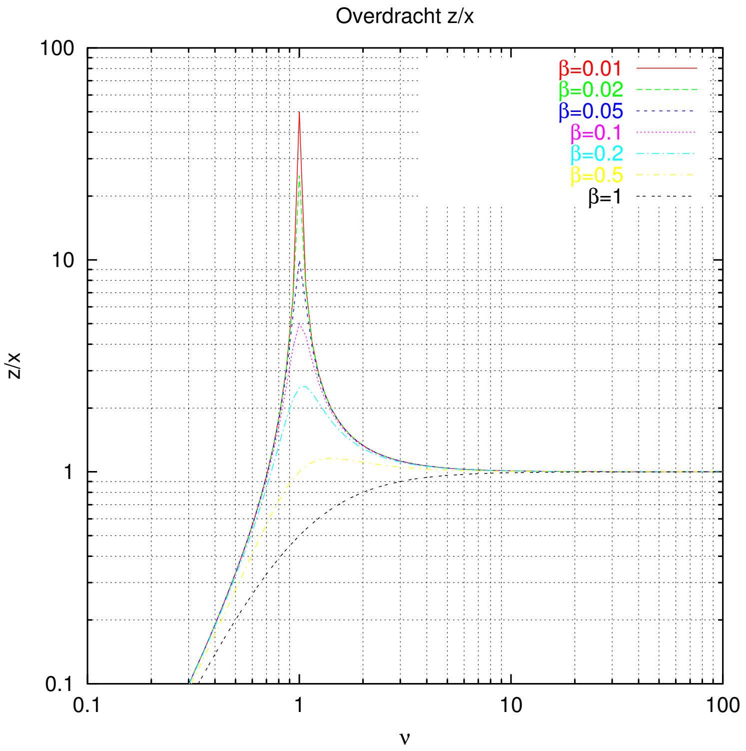
In bovenstaande figuur is een versnellingsopnemer van het piëzo-elektrische type weergegeven. Het bestaat uit een kubusvormige massa die ingeklemd is tussen 6 stukjes piëzo elektrisch materiaal, aan alle zijden van de kubus een stukje. Dit materiaal heeft de eigenschap dat het bij samendrukking een elektrische spanning afgeeft, evenredig met de druk op het materiaal. Omdat ook dit materiaal, net als de meeste materialen, onder druk dunner (of lager, of smaller, afhankelijk van de richtingen van de kracht) wordt bij een drukkracht, en het zich gedraagt volgens de wet van Hooke, is dus ook de indrukking evenredig afgegeven spanning. De stukjes piëzo materiaal zijn dus ook op te vatten als veren.

We beschouwen in deze opgave de beweging van het systeem in horizontale richting. De overige verplaatsings-, snelheids- en versnellingsrichtingen laten we buiten beschouwing.

a Maak van het gevraagde systeem en vrijlichaamschets en **leidt** de differentiaalvergelijking af. Noem de ingaande horizontal beweging van het huis x, de beweging van de kubus y en het verschil van de beweging tussen huis en kubus z. Daarmee is dus $z = x - y$.

b Leidt uit de differentiaal vergelijking de overdracht van de verplaatsing x naar de verschilverplaatsing z af.

c (Hint: Maak gebruik van de relaties $\vec{x} = \vec{X}e^{i\omega t}$ en zijn afgeleiden). In de volgende figuur is het bode diagram voor de overdracht $\frac{z}{x}$ gegeven. Beredeneer waarom men voor versnellingsopnemers kiest voor een hoge eigenhoeksnelheid ten opzichte van het verwachte of gewenste meetbereik, met ander woorden waarom er gemeten wordt ruim links van de opslingerpiek in het diagram. (Frequentieverhouding $\nu \ll 1$.)

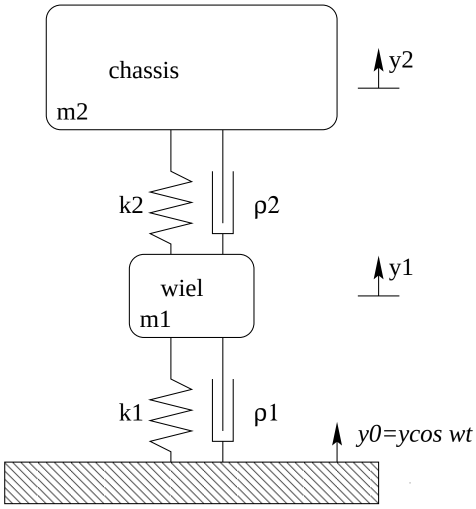


5Meet: Meetinstrumenten op basis van massaveersystemen

9 april 2003

File : `6Simulatie/o1.tex`

Opgave 1. Simulatie van meervoudige massaveersystemen.



In bovenstaande figuur is een massaveersysteem gegeven met twee gekoppelde massa's, welke een model vormen voor de wielophanging van een auto. De bovenste massa is het chassis, de onderste de "onafgeveerde" massa van wiel+ naaf. Het onderste stel veer+demper is de band, het bovenste paar geeft de veer en demper weer zoals we die bij een auto tussen wiel en chassis aantreffen.

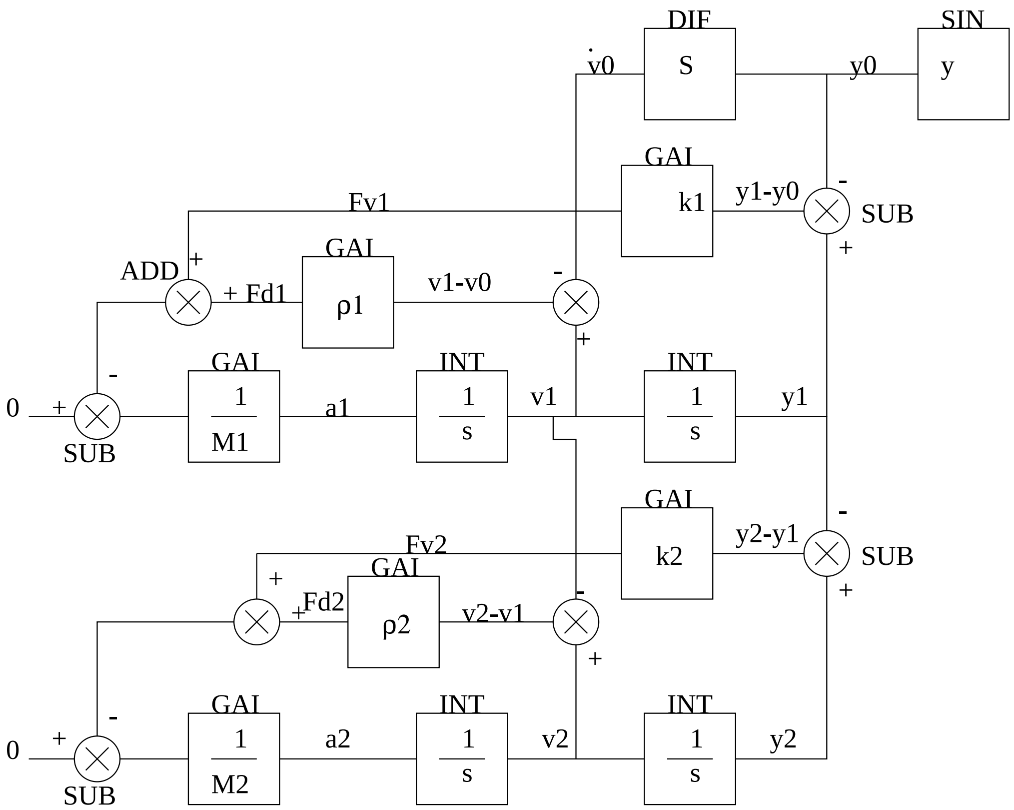
Dit massaveersysteem wordt aangedreven door een hobbelige weg (met een mooi sinusvormig ribbelpatroon van constante golflente en amplitude). Met andere woorden: $y_0(t) = \hat{y}\cos(\omega \cdot t)$ Als effect van deze gedwongen beweging willen we kracht weten die door veer 2 en demper 2 wordt uitgeoefend op het chassis.

Geef van het systeem en aandrijving het blokschema, waarin duidelijk de aandrijvende functie en de gevraagde uitgang is aangegeven. Geef voor elk van de blokken duidelijk aan van welk type (vermenigvuldiging met constante, integrator, differentiator, etc.) zij zijn en hoe de eventuele parameters bepaald kunnen worden.

6Simulatie: Simulatieaspecten

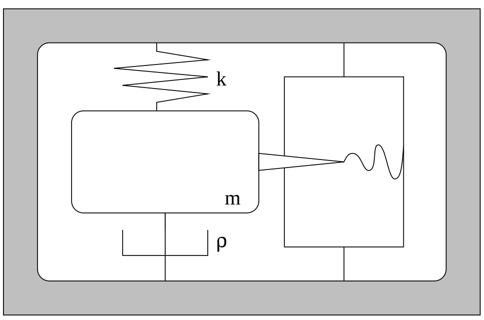
8 mar 1998

Antwoord:
Blokschema in onderstaande figuur.



Het kiezen van de integratietijd doen we aan de hand van het snelst optredende signaal, zodanig dat een complete golf tenminste zolang duurt als 100 integratietijden. De totale meettijd is afhankelijk van wat we willen zien, maar kan bijvoorbeeld bepaald worden aan de hand van de laagste eigenhoeksnelheid, waarvan we bijvoorbeeld 1 of twee volledige golven willen zien. *File :* `6Simulatie/o2.tex`

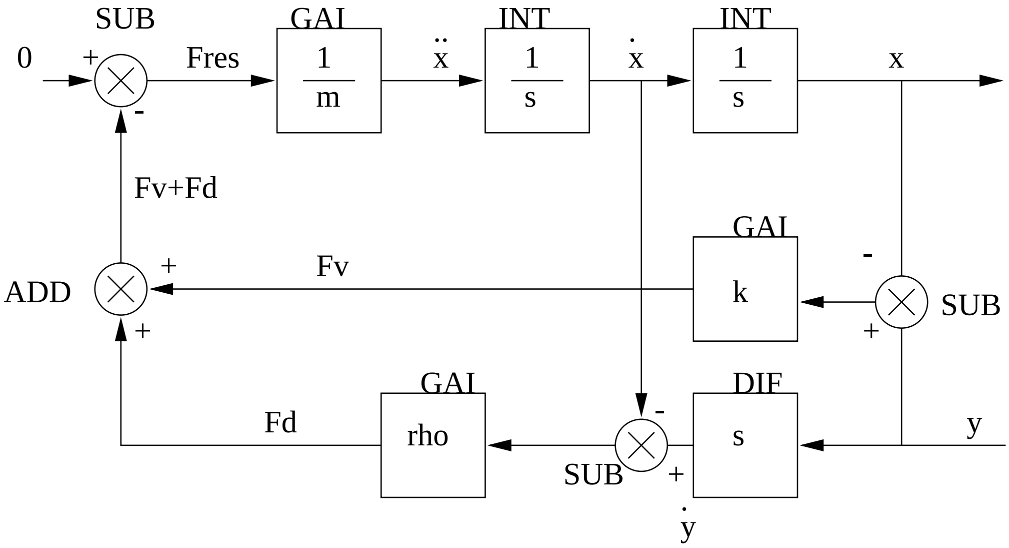
Opgave 2.
Simulatie



Het in bovenstaande figuur gegeven seismisch instrument dient ter meting van de beweging in de vertikale richting. De pen zal de beweging van de massa ten opzichte van het huis op het papier op de verticale roterende cilinder schrijven.
Gevraagd Geef het blokschema voor de situatie met ingaand signaal de trilling van de omgeving en als uitgaand signaal de beweging van de pen ten opzichte van het papier.

6Simulatie: Simulatie van massaveersystemen

Antwoord:
Zie figuur:



18 okt 1995

Formules

Voor alle complexe getallen geldt:

$$\forall z = a + i \cdot b, |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

Algemene definities

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

$$\beta = \frac{\rho}{2\sqrt{km}} \tag{3}$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\rho}{2m}\right)^2} \tag{4}$$

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_n} \tag{5}$$

Vrije trillingen

$$\beta = 0 \Rightarrow x(t) = A.\cos(\omega_n.t + \phi) \tag{6}$$

$$0 < \beta < 1 \Rightarrow x(t) = A.e^{-\frac{\rho}{2m}.t}\cos(\omega_d.t + \phi) \tag{7}$$

$$\beta = 1 \Rightarrow x(t) = (A + B.t)e^{\frac{-\rho}{2m}t} \tag{8}$$

$$\beta > 1 \Rightarrow x(t) = e^{\frac{-\rho}{2m}t}\left[A.e^{\sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.t} + B.e^{-\sqrt{\left(\frac{\rho}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}.t}\right] \tag{9}$$

Logaritmisch decrement:

$$\delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{10}$$

Gedwongen trillingen

Overdracht kracht naar verplaatsing ($\vec{X}$ en $\vec{F}$ zijn hier beide vectoren in het complexe vlak):

$$\frac{\vec{X}}{\vec{F}} = \frac{1}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k} = \frac{1}{k}.\frac{1}{1 + 2\,i\,\beta\nu - \nu^2} \tag{11}$$

Overdracht kracht $\vec{F}$ naar snelheid $\dot{\vec{X}}$:

$$\frac{\dot{\vec{X}}}{\vec{F}} = \frac{i\omega}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k} = \frac{1}{\sqrt{km}}.\frac{i\nu}{1 + 2\,i\,\beta\nu + -\nu^2} \tag{12}$$

Overdracht kracht $\vec{F}$ naar versnelling $\ddot{\vec{X}}$:

$$\frac{\ddot{\vec{X}}}{\vec{F}} = \frac{-\omega^2}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k} = \frac{1}{m}.\frac{-\nu^2}{1 + 2\,i\,\beta\nu - \nu^2} \tag{13}$$

Overdracht beweging vloer $\vec{Z}$ naar beweging $\vec{X}$ van massa (passieve trillingsisolatie) of kracht $\vec{F}$ op massa naar kracht op vloer $\vec{K}$.

$$\frac{\vec{X}}{\vec{Z}} = \frac{\vec{K}}{\vec{F}} = \frac{i\rho\omega + k}{-m\omega^2 + i\rho\omega + k} = \frac{1 + 2\,i\,\beta\nu}{1 + 2\,i\,\beta\nu - \nu^2} \tag{14}$$

Kracht $\vec{F}$ op de vloer ten gevolge van onbalans met hoeksnelheid ω, massa m en excentriciteit r:

$$\frac{\vec{F}}{r.m.\omega_n^2} = \frac{-\nu^2.(1 + 2\,i\,\beta\nu)}{1 + 2\,i\,\beta\nu - \nu^2} \tag{15}$$